

Секция 3



Актуальные проблемы современной физики, математики и информатики

А. И. БАСИК, Н. С. КИРИЛЬЧУК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ БОРЕЛЯ-ПОМПЕЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В настоящей работе доказывается одно специальное интегральное представление дифференцируемых вектор-функций, обобщающее известную из анализа формулу Бореля-Помпею [1, с. 94, формула (16)] (см. также формулу (42) на с. 220).

Пусть $A_j (j = 1, \dots, n)$ – невырожденные квадратные матрицы p -ого порядка, удовлетворяющие условиям:

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 2E\delta_{kj}, \quad (k, j = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где E – единичная матрица p -ого порядка, δ_{kj} – символ Кронекера.

Введем следующие обозначения:

$$D(\xi) := \sum_{j=1}^n A_j \xi_j, \quad D^*(\xi) := \sum_{j=1}^n A_j^{-1} \xi_j,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$.

Пусть, далее, Ω – область в пространстве R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Для точек $y \in \partial\Omega$ через $M(x; y)$ обозначим $p \times p$ матрицу

$$M(x; y) := -D^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} \cdot D(v(y)), \quad (2)$$

где $v(y) = (v_1(y), \dots, v_n(y))$ – единичное поле внешних нормалей на поверхности $\partial\Omega$, $\partial/\partial y = (\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_n)$.

Через $N(x; y)$ обозначим матричный, размера $p \times p$, дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$N(x; y)U(y) := -D^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} \cdot D \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) U(y), \quad (3)$$

здесь $U(y) = (u_1(y), \dots, u_n(y))^T$ – функциональный вектор-столбец высоты p .

Лемма. Пусть вектор-функция $U: \Omega \rightarrow R^p$ непрерывна в области $\Omega \subset R^n$. Тогда в каждой точке $x \in \Omega$ выполнено равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\chi_n} \int_{|x-y|=\delta} M(x; y)U(y) dS(y) = U(x), \quad (4)$$

где $\chi_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) - (n-1)$ - мерная площадь единичной сферы в R^n .

Доказательство. Вектор $v(y)$ единичной внешней нормали к сфере

$$S(x; \delta) := \{y \in R^n \mid |x-y| = \delta\}$$

в точке $y \in S(x; \delta)$ имеет координаты:

$$v_j(y) = \frac{y_j - x_j}{|x - y|}, j = 1, \dots, n.$$

Вычислим матрицу $M(x, y)$:

$$M(x; y) = \sum_{j,k=1}^n A_j^{-1} A_k \frac{(y_j - x_j)(y_k - x_k)}{|x - y|^{n+1}}.$$

В силу равенств (1) получим, что

$$\sum_{j,k=1}^n A_j^{-1} A_k \frac{(y_j - x_j)(y_k - x_k)}{|x - y|^{n+1}} = E \sum_{j=1}^n \frac{(y_j - x_j)^2}{|x - y|^{n+1}} = E \frac{1}{|x - y|^{n-1}}.$$

Таким образом, в случае, когда область Ω есть открытый шар $B(x; \delta)$ с центром в точке x и радиуса δ , матрица $M(x; y)$ имеет вид:

$$M(x; y) = E \frac{1}{|x - y|^{n-1}}.$$

Выберем произвольное положительное число ε . Поскольку функция $U = U(x)$ непрерывна в точке x , то найдется такое число $\Delta > 0$, что замкнутый шар $B[x; \Delta] \subset \Omega$ и как только точка y будет удалена от точки x на расстояние меньше, чем Δ , то $|U(x) - U(y)| < \varepsilon$.

При $0 < \delta < \Delta$ имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\chi_n} \int_{|x-y|=\delta} M(x; y) U(y) dS(y) - U(x) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\delta^{n-1} \chi_n} \int_{|x-y|=\delta} |U(y) - U(x)| dS(y) < \varepsilon \frac{1}{\delta^{n-1} \chi_n} \delta^{n-1} \chi_n = \varepsilon. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Докажем аналог формулы Бореля-Помпею интегрального представления дифференцируемых вектор-функций.

Теорема 1. Пусть Ω — ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, вектор-функция $U: \bar{\Omega} \rightarrow R^p$ непрерывно дифференцируема в замыкании области Ω . Тогда

$$\frac{1}{\chi_n} \int_{\partial\Omega} M(x; y) U(y) dS(y) - \frac{1}{\chi_n} \int_{\Omega} N(x; y) U(y) dy = \begin{cases} U(x), \text{ если } x \in \Omega; \\ 0, \text{ если } x \in R^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$N(x; y) U(y) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} \left(D^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} \cdot A_k U(y) \right). \quad (5)$$

Выберем произвольную точку $x \in \Omega$, тогда при достаточно малом $\delta > 0$ открытый шар $B(x; \delta)$ полностью содержится в Ω . Согласно формуле Остроградского, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus B(x; \delta)} N(x; y) U(y) dy = \\ & = - \int_{\partial(\Omega \setminus B(x; \delta))} D^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} \cdot \sum_{k=1}^n A_k v_k(y) U(y) dS(y) = \\ & = \int_{\partial(\Omega \setminus B(x; \delta))} M(x; y) U(y) dS(y) = \int_{\partial\Omega} M(x; y) U(y) dS(y) + \int_{|x-y|=\delta} M(x; y) U(y) dS(y). \end{aligned}$$

Уточним, что в последнем интеграле вектор внешней нормали ν к $\partial(\Omega \setminus B(x; \delta))$ является вектором внутренней нормали по отношению к шару $B(x; \delta)$. Перейдя к пределу в последнем равенстве при $\delta \rightarrow 0$, согласно лемме, получим:

$$\int_{\Omega} N(x; y) U(y) dy = \int_{\Omega} M(x; y) U(y) dS(y) - \chi_n U(x).$$

Если же точка $x \in R^n \setminus \bar{\Omega}$, то снова, применяя формулу Остроградского для равенства (5), получим равенство

$$\int_{\Omega} N(x; y) U(y) dy = \int_{\partial\Omega} M(x; y) U(y) dS(y).$$

Теорема доказана полностью.

Следствием доказанной теоремы 1 является аналог интегральной формулы Коши для решений следующей системы уравнений первого порядка с частными производными

$$\sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0. \quad (6)$$

В силу того, что матричные коэффициенты системы (6) удовлетворяют равенствам (1), то (6) является n -мерным аналогом системы Коши-Римана [2].

Следствие. Если непрерывная вектор-функция $U: \bar{\Omega} \rightarrow R^p$ удовлетворяет системе (6) в области Ω , то

$$\frac{1}{\chi_n} \int_{\partial\Omega} M(x; y) U(y) dS(y) = \begin{cases} U(x), \text{ если } x \in \Omega, \\ 0, \text{ если } x \in R^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе, А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1969. – 240 с.

2. Усс, А.Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши-Римана / А.Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.

А. И. БАСИК, А. А. ШАРМАНОВ

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

УСЛОВИЕ Я.Б. ЛОПАТИНСКОГО КРАЕВЫХ ЗАДАЧ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА НОРМАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В R^3

В работе рассматривается условие Я.Б. Лопатинского (условие регуляризуемости) краевых задач для однопараметрического семейства нормальных эллиптических систем четырех уравнений первого порядка с тремя переменными. Это условие обеспечивает нетеровость в широком классе пространств задачи Римана-Гильберта для эллиптических систем с частными производными первого порядка и состоит в дополнительном ограничении на матрицу краевого условия [1, 2]. В настоящей работе получен критерий, позволяющий в явном виде описать условие Я.Б. Лопатинского в терминах матрицы граничного условия и нормального вектора к граничной поверхности. Подобное условие было ранее получено Шевченко В.И. для системы Моисила-Теодореску [3] (см. также [4]), а также Уссом А.Т. для трехмерных аналогов системы Коши-Римана [5].

Пусть в ограниченной односвязной области $\Omega \subset R^3$, границей которой является поверхность Ляпунова $\partial\Omega$, задана система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами:

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где $U(x) = (U_1(x), U_2(x), U_3(x), U_4(x))^T$ – неизвестная вектор-функция, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, а матрицы A_1 , A_2 и A_3 имеют вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \varphi \in [0; 2\pi[.$$

Отметим, что системы вида (1) с указанными выше коэффициентами являются нормальными эллиптическими системами в R^3 [6].

Пусть, далее, на поверхности $\partial\Omega$ заданы непрерывные по Гельдеру двухкомпонентная вектор-функция $f(y)$ и матрица функция $B(y)$, имеющая вид:

$$B(y) := \begin{bmatrix} b_{11}(y) & b_{12}(y) & b_{13}(y) & b_{14}(y) \\ b_{21}(y) & b_{22}(y) & b_{23}(y) & b_{24}(y) \end{bmatrix}.$$

Задача Римана-Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в Ω и непрерывного по Гельдеру в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, удовлетворяющего на $\partial\Omega$ граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega). \quad (2)$$

Задача (1), (2) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda v(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (3)$$

максимален в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y векторе $\tau = \tau(y)$ (в рассматриваемом случае равен двум). Здесь $A(\xi) = \sum_{j=1}^3 A_j \xi_j$ – характеристическая матрица системы (1), $v = v(y)$ – единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y , и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру γ , лежащему в верхней комплексной λ -полуплоскости и охватывающему корень $\lambda = i$ уравнения

$$\det A(\lambda v(y) + \tau(y)) = 0.$$

Для формулировки результата введем некоторые обозначения. Через Λ_{jk} обозначим минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$), и рассмотрим векторное поле

$$L(y) = (\Lambda_{12} - \Lambda_{34}; -\Lambda_{13} - \Lambda_{24}; -\Lambda_{14} + \Lambda_{23}).$$

Теорема 1. Задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке $y \in \partial\Omega$ выполняется неравенство:

$$\langle v(y); L(y) \rangle \neq 0, \quad (4)$$

здесь $v(y)$ – единичное поле нормали на поверхности $\partial\Omega$, $\langle \cdot; \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^3 .

Доказательство. Пусть H_{jk} – минор матрицы Я.Б. Лопатинского (3), составленный из ее j -го и k -го столбцов ($j, k = 1, 2, 3, 4$). Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{12} = -H_{34}, \quad H_{13} = H_{24}, \quad H_{14} = -H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя

$$H_{12} = \tau_1 \langle \tau; L \rangle - v_1 \langle v; L \rangle + i(\tau_1 \langle v; L \rangle + v_1 \langle \tau; L \rangle),$$

$$H_{13} = -\tau_2 \langle \tau; L \rangle + v_2 \langle v; L \rangle + i(-\tau_2 \langle v; L \rangle - v_2 \langle \tau; L \rangle),$$

$$H_{14} = -\tau_3 \langle \tau; L \rangle + v_3 \langle v; L \rangle + i(-\tau_3 \langle v; L \rangle - v_3 \langle \tau; L \rangle).$$

Условие максимальности ранга матрицы Я.Б. Лопатинского (3) равносильно тому, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном касательном векторе $\tau(y)$ к $\partial\Omega$ в точке y выполняется неравенство

$$|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 \neq 0. \quad (5)$$

Заметим, что

$$|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 2 \cdot \left(\langle \tau; L \rangle^2 + \langle v; L \rangle^2 \right).$$

Если $\langle v; L \rangle \neq 0$ на $\partial\Omega$, то (5) очевидно выполняется.

Если же условие (5) выполняется и $\langle v; L \rangle = 0$ в некоторой точке $y \in \partial\Omega$, то в этой точке вектор $L(y)$ лежит в касательной плоскости $T_y \partial\Omega$ к поверхности $\partial\Omega$ в точке y . Тогда в $T_y \partial\Omega$ найдется вектор $\tau(y)$ ортогональный $L(y)$, т. е. такой, что $\langle \tau; L \rangle = 0$. Следовательно, $|H_{12}|^2 + |H_{13}|^2 + |H_{14}|^2 = 0$ в точке y . Полученное противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович, М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
2. Лопатинский, Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
3. Шевченко, В.И. Гомотопическая классификация задач Римана-Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Респ. межвед. сб. «Матем. физика». – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
4. Полуниин, В.А. Об условии Шапиро-Лопатинского в задаче Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка / В.А. Полуниин, А.П. Солдатов // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. – 2010 – № 17 (88). – Вып. 20. – С. 91–100.
5. Усс, А.Т. Краевая задача Римана-Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши-Римана / А.Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.
6. Балабаев, В.Е. Нормальные эллиптические системы первого порядка / В.Е. Балабаев // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 1 – С. 71–83.

С. М. БИРУК

МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

Р₁ВР₁-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АВТОНОМНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим обыкновенную автономную дифференциальную систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n X_i(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^n Y_i(x, y), \quad (1)$$

где $X_i: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ и $Y_i: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ – однородные полиномы i -й степени с коэффициентами из поля \mathbf{R} . При этом $|X_n(x, y)| + |Y_n(x, y)| \neq 0$ на \mathbf{R}^2 , что соответствует тому, что хотя бы одна из производных представляется полиномом n -й степени.

В [1–3] рассмотрены вопросы взаимосвязи между поведением траекторий системы (1) и её первой и второй приведённых систем Пуанкаре, а также вопросы топологической эквивалентности дифференциальных систем на сфере Пуанкаре. В [4] установлена взаимосвязь между поведением траекторий системы (1) на сфере Пуанкаре и сфере Бендиксона.

Предложение. В результате суперпозиции первого преобразования Пуанкаре $x = y_1^{-1}, y = x_1 y_1^{-1}$, преобразования Бендиксона $x_1 = 4y_2(x_2^2 + y_2^2)^{-1}, y_1 = 4x_2(x_2^2 + y_2^2)^{-1}$ и первого преобразования Пуанкаре $x_2 = y_3^{-1}, y_2 = x_3 y_3^{-1}$, или преобразования

$$x = (1 + x_3^2)(4y_3)^{-1}, \quad y = x_3, \quad (2)$$

система (1) приводится к полиномиальной системе

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{d\tau} &= (1 + x_3^2) \sum_{i=0}^n (4y_3)^{n-i} X_i(1 + x_3^2, 4x_3 y_3), \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= -4y_3^2 \sum_{i=0}^n (4y_3)^{n-i} X_i(1 + x_3^2, 4x_3 y_3) + 2x_3 y_3 \sum_{i=0}^n (4y_3)^{n-i} Y_i(1 + x_3^2, 4x_3 y_3), \end{aligned} \quad (3)$$

где $(1 + x_3^2)(4y_3)^n d\tau = dt$.

Преобразование (2) назовём *Р₁ВР₁-преобразованием*. Дифференциальную систему (3) назовём *Р₁ВР₁-приведённой системой*, индуцированной системой (1).

Свойство 1. Если точка $M(x, y)$ является состоянием равновесия системы (1), расположенным в конечной части фазовой плоскости (x, y) , и не лежит на оси ординат Oy , то точка $M' \left(y, (1 + y^2)(4x)^{-1} \right)$ является состоянием равновесия *Р₁ВР₁-приведённой системы (3)*, не лежащим на оси $O'x_3$. При этом вид состояний равновесия M и M' одинаков.

Свойство 2. Если точка $N'(x_3, y_3)$ является состоянием равновесия *Р₁ВР₁-приведённой системы (3)*, расположенным в конечной части фазовой плоскости (x_3, y_3) , и не лежит на оси абсцисс $O'x_3$, то точка $N \left((1 + x_3^2)(4y_3)^{-1}, x_3 \right)$, не лежащая на оси Oy , является состоянием равновесия системы (1) того же вида что и состояние равновесия N' .

Свойство 3. Поведение траекторий системы (3), расположенных в полуплоскости $y_3 > 0$, биективно соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости $x > 0$, с сохранением направления движения вдоль траекторий. Поведение траекторий системы (3), расположенных в полуплоскости $y_3 < 0$, биективно, с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1), расположенных в полуплоскости $x < 0$.

Свойство 4. Поведение траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой точки лежащей на «концах» оси Ox проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) определяется поведением траекторий системы (3) в окрестности оси абсцисс $O'x_3$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) .

Если точка $A'(a,0)$ лежит на конечной части фазовой плоскости (x_3, y_3) , то A' -траекториям системы (3) соответствуют траектории системы (1), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси Ox , в направлении прямой $y = a$.

Траекториям системы (3), примыкающим к «концам» оси $O'x_3$, соответствуют траектории системы (1), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси Ox , в направлении бесконечно удалённой прямой $y_1 = 0$ проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) системы (1).

Соответствие между секторами Бендиксона состояний равновесия системы (3), лежащих на оси $O'x_3$, и секторами Бендиксона состояния равновесия системы (1), лежащего на «концах» оси Ox , определяется принципами, описанными в [4].

Свойство 5. Поведение траекторий системы (3) в окрестности бесконечно удалённой прямой $x_2 = 0$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) , из которой удалены точки, соответствующие «концам» координатных осей $O'x_3$ и $O'y_3$, с точностью до направления движения вдоль траекторий, соответствует поведению траекторий системы (1) в окрестности бесконечно удалённой прямой $y_1 = 0$ проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) , из которой удалены точки соответствующие «концам» координатных осей Ox и Oy .

При этом бесконечно удалённой точке лежащей на «концах» прямой $y_3 = bx_3$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) системы (3) соответствует бесконечно удалённая точка проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) системы (1), размещённая на «концах» прямой $y = 4bx$.

Свойство 6. Поведение траекторий системы (3) в окрестности бесконечно удалённой точки, лежащей на «концах» оси $O'y_3$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) , определяется поведением траекторий системы (1) в окрестности оси ординат Oy проективной фазовой плоскости (y_1, x, y) .

Если точка $A(0,a)$ лежит на конечной части фазовой плоскости (x, y) , то A -траекториям системы (1) соответствуют траектории системы (3), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси $O'y_3$, в направлении прямой $x_3 = a$.

Траекториям системы (1), примыкающим к «концам» оси Oy , соответствуют траектории системы (3), примыкающие к точке, лежащей на «концах» оси $O'y_3$, в направлении бесконечно удалённой прямой $x_3 = 0$ проективной фазовой плоскости (x_2, x_3, y_3) системы (3).

Соответствие между секторами Бендиксона состояний равновесия системы (1), лежащих на оси Oy , и секторами Бендиксона состояния равновесия системы (3), лежащего на «концах» оси $O'y_3$, определяется принципами, описанными в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбузов, В.Н. Траектории полиномиальной дифференциальной системы на сфере Пуанкаре / В.Н. Горбузов, И.В. Королько // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 845–846.
2. Горбузов, В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2011. – № 2 (111). – С. 15–26.
3. Горбузов, В.Н. Траектории проективно приведенных дифференциальных систем / В.Н. Горбузов // Веснік ГрДзУ. Сер. 2. – 2012. – № 1 (126). – С. 39–52.
4. Горбузов, В.Н. Траектории дифференциальных систем на сфере Бендиксона / В.Н. Горбузов, И.В. Королько, В.Ю. Тыщенко // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 15–19.

С. Л. БОНДАРЕВ¹, Н. Г. КОЗЛОВ², В. Н. КНЮКШТО³, Л. И. БАСАЛАЕВА²

¹МГВРК (г. Минск, Беларусь)

²ИФОХ НАНБ (г. Минск, Беларусь)

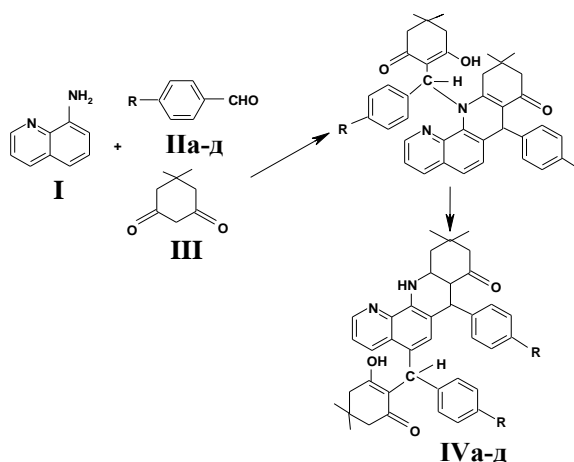
³ИФ НАНБ им. Б.И. Степанова (г. Минск, Беларусь)

СПЕКТРАЛЬНО-ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ И НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ГЕТЕРОЦИКЛИЧЕСКИХ КАРБОНИЛСОДЕРЖАЩИХ ФЛУОРОФОРОВ, СИНТЕЗИРОВАННЫХ МЕТОДОМ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ КОНДЕНСАЦИИ

Органические гетероциклические соединения, содержащие в своей структуре карбонильную группу, представляют большой интерес как с научной точки зрения, так и в прикладном аспекте. Это обусловлено перспективностью использования этих соединений в практике: квантовой электронике (в качестве лазерно-активных сред), молекулярной электронике (электролюминесцентные устройства), фотовольтаических ячейках (люминесцентные концентраторы солнечной энергии), в оптоэлектронике (оптические системы записи и хранения информации, в частности, голографические регистрирующие среды), при разработке цветных дисплеев [1, 2]. Среди основных требований, предъявляемых к новым соединениям, являются их интенсивная люминесценция в широком спектральном диапазоне, термо- и светостойкость, химическая активность или, наоборот, инертность и так далее.

Поэтому непрерывно ведется поиск соединений с необходимыми для практики свойствами и исследуются их спектрально-люминесцентные и нелинейно-оптические характеристики.

К настоящему времени нами получены определенные результаты в разработке новых подходов к синтезу гетероциклических соединений на основе реакций, которые приводят к максимально функционализированным бензоакридиновым производным при наименьшем числе стадий [3–5].



Путем трехкомпонентной конденсации были синтезированы и исследованы спектрально-люминесцентные и нелинейно-оптические свойства арилметиленипиримидинтрионов и пиримидохинолиндионов [3], гидробензоакридинкарбоксилатов [4], гидробензофенантролинонов [5]. Схема синтеза путем трехкомпонентной конденсации показана на примере получения производных гидробензофенантролинонов IV а-д, которая включает в себя конденсацию 8-аминохинолина (I), ароматических альдегидов (II а-д) и димедона (III) [5].

Все исследованные соединения в жидких и твердых растворах, а также в поликристаллическом состоянии обладают свечением в виде $S_1 \rightarrow S_0$ – флуоресценции и $T_1 \rightarrow S_0$ – фосфоресценции, интенсивность которых зависит от структуры молекул и физико-химических свойств окружения. Так, для поликристаллов ряда производных пиримидинкетон [3]

зарегистрирована интенсивная флуоресценция в широком спектральном диапазоне от 400 нм до 650 нм. Также для некоторых производных арилметиленипиримидинтрионов в кристаллическом состоянии обнаружены нелинейно-оптические эффекты в виде двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции ($\lambda_{фл.}^{макс.} = 640$ нм и $\lambda_{возб.} = 1060$ нм) и генерации второй гармоники неодимового лазера (532 нм) при возбуждении первой гармоникой 1060 нм [3].

Для ряда производных гидробензоакридин-карбоксилатов [4] в этаноле при комнатной температуре обнаружена флуоресценция в диапазоне 400–550 нм с высоким квантовым выходом (~ 50 %), а при 77 К – фосфоресценция в диапазоне 500–650 нм с временем жизни 1.0 с. В случае гидробензофенантролинонов [5] показано, что вероятность безызлучательных переходов в этих соединениях сильно зависит от полярности среды. Так, квантовые выходы флуоресценции при комнатной температуре в неполярном растворителе толуоле на порядок больше, чем в полярном этаноле, а при 77 К квантовый выход в этаноле возрастает на два порядка. Эти данные хорошо объясняются с точки зрения теории Маркуса [6], согласно которой эффективная безызлучательная дезактивация энергии электронного возбуждения в полярных средах и при понижении температуры осуществляется через дополнительное состояние с переносом заряда.

Таким образом, спектрально-люминесцентные и нелинейно-оптические исследования синтезированных гетероциклических карбонилсодержащих соединений показали, что некоторые из них обладают интенсивной люминесценцией в УФ и видимом спектральных диапазонах, а при высоких плотностях энергии возбуждения проявляют высокую эффективность в нелинейно-оптических процессах двухфотонно-возбуждаемой флуоресценции и генерации второй гармоники лазерного излучения. В связи с этим целесообразно дальнейшее изучение люминесцентных и нелинейно-оптических свойств этих соединений в полимерных жестких матрицах при комнатной температуре, на основе которых возможно создание тонкопленочных, гибких, больших размеров панелей для фотовольтаических элементов, оптических ограничителей света и электролюминесцентных дисплеев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Разумов, В.Ф. Молекулярная электроника – проблемы и перспективы / В.Ф. Разумов // Изв. РАН. Сер. физ. – 2012. – Т. 76. – № 2. – С. 223–226.
2. Handbook of organic electronics and photonics (3-volume set) / Ed. H.S. Nalva. – American scientific publishers, 2008.
3. Синтез арилметиленипиримидинтрионов и пиримидохинолиндионов, обладающих флуоресцентными и нелинейно-оптическими свойствами / Н.Г. Козлов, С.Л. Бондарев, Б.А. Однбурцев, Л.И. Басалаева // Ж. прикл. хим. – 2007. – Т. 80. – № 4. – С. 1131–1134.
4. Синтез, изомерия и спектрально-люминесцентные свойства метил гексагидробензо[а]акридин-9- и [с]акридин-10-карбоксилатов / Н.Г. Козлов, С.Л. Бондарев, В.Н. Кнюкшто, Б.А. Однбурцев, Л.И. Басалаева // ЖОрХ. – 2010. – Т. 46. – № 11. – С. 1639–1645.
5. Спектрально-люминесцентные свойства продуктов конденсации 8-аминохинолина, ароматических альдегидов и димедона / Н.Г. Козлов, С.Л. Бондарев, Е.Д. Скаковский, А.В. Барановский, В.Н. Кнюкшто, Л.И. Басалаева // ЖПС. – 2012. – Т. 79. – № 4. – С. 544–551.
6. Marcus, R.A. Electron transfer reactions in chemistry. Theory and experiment / R.A. Marcus // Rev. Mod. Phys. – 1993. – Vol. 92. – P. 599–610.

А. Е. БУДЬКО

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ ВРЕМЕНИ И ЕМКОСТИ ТЬЮРИНГОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Будем рассматривать вычисления, выполняемые одноленточной машиной Тьюринга с внешним алфавитом $A = (a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ и внутренним алфавитом $B = (q_0, q_1, \dots, q_k)$. За один такт головка такой машины записывает в обозреваемую ячейку символ (может записать тот же), сдвигается влево или вправо к соседней ячейке или остается на месте и переходит в новое внутреннее состояние или остается в том же.

В [1] была получена оценка

$$t(n) \leq k \cdot s(n) \cdot m^{s(n)}, \quad (1)$$

где $t(n)$ и $s(n)$ – соответственно время и емкость работы машины над начальной конфигурацией длины n . В [2] указана оценка

$$t(n) \leq (k + 1) \cdot (s(n))^2 \cdot m^{s(n)}. \quad (2)$$

Наконец, в [3] получена оценка

$$t(n) \leq k \cdot m^{s(n)} - \frac{m^{s(n)} - 1}{m - 1} + s(n). \quad (3)$$

В (1) с каждым внутренним состоянием q_i ($i \geq 1$) имеется не более $s(n) \cdot m^{s(n)}$ конфигураций, в (2) – не более $\frac{k+1}{k} \cdot (s(n))^2 \cdot m^{s(n)}$ и в (3) – не более $m^{s(n)}$ конфигураций. Из приведенных оценок оценка (3) является наиболее точной. Покажем, что эта оценка практически неупрощаема. Для этого приведем пример машины, у которой при работе над начальной конфигурацией определенного вида для каждого из $k - 1$ состояний имеется ровно $m^{s(n)}$ конфигураций.

Рассмотрим машину с внешним алфавитом $A = (0, 1)$, то есть $m = 2$. Машина имеет $k = 4r + 1$ неконечных внутренних состояний, где $r \in \mathbb{N}$. Программа машины состоит из r одинаковых по структуре частей и плюс последняя $(r + 1)$ -ая часть. Каждая из r первых частей состоит из 8 команд и имеет следующий вид ($1 \leq i \leq r$):

$8i - 7. q_{4i-3} 1 \rightarrow 1Пq_{4i-2},$

$8i - 6. q_{4i-3} 0 \rightarrow 0Пq_{4i-2},$

$8i - 5. q_{4i-2} 0 \rightarrow 1Лq_{4i-3},$

$8i - 4. q_{4i-2} 1 \rightarrow 1Лq_{4i-1},$

$8i - 3. q_{4i-1} 1 \rightarrow 1Пq_{4i},$

$8i - 2. q_{4i-1} 0 \rightarrow 0Пq_{4i},$

$8i - 1. q_{4i} 1 \rightarrow 0Лq_{4i-1},$

$8i. q_{4i} 0 \rightarrow 0Лq_{4i+1}.$

Последняя $(r + 1)$ -ая часть состоит из двух команд и имеет вид:

$8r + 1. q_{4r+1} 0 \rightarrow 0Пq_0,$

$8r + 2. q_{4r+1} 1 \rightarrow 0Сq_1.$

Применим построенную машину к начальной конфигурации $q_1 10$. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что время работы машины будет равно $4k - 2$. В то же время правая часть оценки (3) принимает значение $4k - 1$, так как $m = 2$, $s(n) = 2$. Приведенный пример показывает, что оценка (3) практически неупрощаема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трахтенброт, Б.А. Сложность алгоритмов и вычислений / Б.А. Трахтенброт. – Новосибирск: НГУ, 1968. – 168 с.
2. Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 224 с.
3. Будько, А.Е. Об одном графическом моделировании тьюринговых вычислений / А.Е. Будько, М.А. Ханукаева // Труды международной математической конференции «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры». – Брест: Издательство С. Лаврова, 2001. – С. 4–9.

О. В. ВЕКО

МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

О ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЕ ВОЗМОЖНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА И МАЙОРАНЫ: ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КВАДРИРОВАНИЯ ДЛЯ СПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

В связи с эффектом Казимира для спинорного поля в области, ограниченной двумя плоскостями, специальный интерес представляют решения уравнения Дирака, отвечающие исчезающему току J^z на границах области. Этого удается достигать при рассмотрении 4-мерного пространства состояний $\{\Psi_4\}$ с базисом из четырех плоских волн: с импульсами

$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3), (k_1, k_2, -k_3)$$

и с двумя возможными состояниями спиральности каждая. Показывается, что применение метода квадрирования к скалярным решениям $\Phi = e^{-i\epsilon t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \sin(kz + \alpha)$ приводит к четырем линейно независимым решениям уравнения Дирака, причем эти пространства состояний оказываются эквивалентными пространству состояний $\{\Psi_4\}$; найдено соответствующее линейное преобразование, связывающее два разных 4-мерных базиса. Изменения фазы α генерируют только изменение базиса в прежнем пространстве.

Исследована зависимость строящихся методом квадрирования решений от выбора явного вида матриц Дирака. В частности, исследованы особенности применения метода квадрирования в представлении Майораны. Показано, что строящиеся из функций

$$\cos(\epsilon t - \vec{k}\vec{x}) \text{ и } -i \sin(\epsilon t - \vec{k}\vec{x})$$

две четверки вещественных и мнимых 4-спиноров определяют соответственно вещественное и чисто мнимое 4-мерные пространства спиноров, причем они не связываются линейным преобразованием. Последнее обстоятельство связано с тем, что они строятся как вещественные и мнимые части 4-мерного комплексного пространства $\{\Psi_4\}$.

Также в явном виде построены майорановские ограничения из обычных плоских волн Дирака, различающихся состояниями поляризации. Возникающие вещественное и чисто мнимые пространства состояний являются 2-мерными, именно их базисные состояния заменяют понятия плоских волн дираковских частиц с различной поляризацией.

Сформулировано общее условия зануления тока J^z для дираковского поля на границах такой области. Задача сведена к однородной системе четырех линейных уравнений относительно комплексных коэффициентов линейной суперпозиции базисных волновых функций, коэффициенты системы зависят от квантовых чисел состояния с фиксированной энергией и четырех нефиксированных фазовых множителей. Условие разрешимости однородной системы: равенство нулю ее определителя имеет вид алгебраического уравнения 4-й степени относительно переменной $x = e^{2ik_3 a}$, где a – половина расстояния между плоскостями. Каждый возможный при сформулированных условиях корень уравнения 4-й степени, лежащий на окружности единичного радиуса, будет давать некоторое правило квантования для третьей проекции импульса k_3 . Явный вид уравнения четвертой степени не зависит от выбора базиса для матриц Дирака.

О. В. GERMAN, О. И. САДОВСКАЯ

БГУИР (г. Минск, Беларусь)

ЗАДАЧА ПОИСКА МАРШРУТА НА МЕСТНОСТИ

Рассмотрим задачу синтеза управления на дискретном множестве операторов. Решение задачи представляет собой последовательность операторов, переводящих систему из одного состояния в другое [1].

Рассмотрим поиск маршрута на некоторой местности. Пусть требуется перевести тело из позиции (6,2) в позицию (1,2). Для такого рода задач повторение пройденного состояния (повторение цикла) не имеет смысла, поэтому даже наличие циклов в графе предшествования не приводит к усложнению задачи. Число всех возможных различных состояний в этой задаче равно числу ячеек на карте местности, поэтому можно породить не более этого числа потомков из начального состояния.

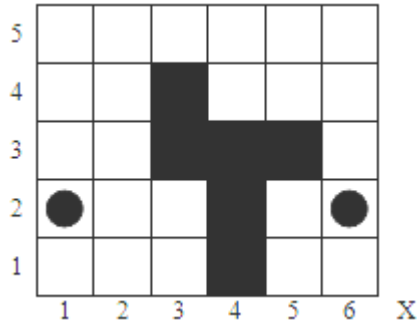


Рисунок 1 – Карта местности поиска маршрута

Запишем операторы для нашей задачи, не принимая во внимание запрещенные состояния, отмеченные черными прямоугольниками на карте местности. Эти запрещенные состояния будут учтены в процессе синтеза управления.

```

X1 X2 X3 X4 X5 X6 V1 V2 V3 V4 V5
U1L=<* 1 * * * * * * * * *10*****>
U2L=<* * 1 * * * * * * * * *10*****>
U3L=<* * * 1 * * * * * * * * *10*****>
U4L=<* * * * 1 * * * * * * * * *10*****>
U5L=<* * * * * 1 * * * * * * * * *10*****>
U6U=<* * * * * * 1 * * * * * * * * *01***>
U7U=<* * * * * * * 1 * * * * * * * * *01**>
U8U=<* * * * * * * * 1 * * * * * * * * *01*>
U9U=<* * * * * * * * * 1 * * * * * * * * *01>
U10D=<* * * * * * * * * * 1 * * * * * * * * *10>
U11D=<* * * * * * * * * * * 1 * * * * * * * * *10*>
U12D=<* * * * * * * * * * * * 1 * * * * * * * * *10**>
U13D=<* * * * * * * * * * * * * 1 * * * * * * * * *10***>
U14D=<* * * * * * * * * * * * * * 1 * * * * * * * * *10****>

```

Исходный пул есть $P = \{ \langle 000001\ 01000_ \rangle \}$. Из этого состояния порожаем потомки:

$$P = \{ \langle 000001\ 01000_ \rangle, \langle 000001\ 00100_7 \rangle, \langle 000010\ 0100_5 \rangle, \langle 000001\ 00001_{14} \rangle \}.$$

Поскольку попадание в исходное состояние далее невозможно, то это состояние блокируется, мы его перечеркиваем:

$$\cancel{P} = \{ \langle \cancel{000001\ 01000_} \rangle, \langle 000001\ 00100_7 \rangle, \langle 000010\ 0100_5 \rangle, \langle 000001\ 00001_{14} \rangle \}.$$

Далее продолжаем движение из одного из потомков. В силу очевидных соображений следует выбрать того потомка, который расположен ближе других к целевой ячейке. Для оценки степени близости можно использовать евклидову метрику:

$$\rho = \left(\sum (x_{ik} - x_{jk})^2 \right)^{0.5},$$

где $x_{ik}(x_{jk})$ – k -я координата двух векторов X_i, X_j .

Поэтому для продолжения выбираем состояние $\langle 000010\ 0100_5 \rangle$. Из этого состояния допустим только переход вниз, так что мы получим следующий пул потомков:

$$\cancel{P} = \{ \langle \cancel{000001\ 01000_} \rangle, \langle 000001\ 00100_7 \rangle, \langle \cancel{000010\ 0100_5} \rangle, \langle 000001\ 00001_{14} \rangle \}, \\ \langle 000010\ 10000_{5\ 13} \rangle \}.$$

Таким же образом этот процесс продолжаем и далее, каждый раз отыскивая потомков того состояния, которое ближе к цели. При этом не допускаются повторения ранее пройденных состояний, то есть циклы и запрещенные состояния. Вычислительная сложность этой процедуры ограничена только числом ячеек на местности. Сама же процедура поиска маршрута является конкретным вариантом метода эвристического поиска Н. Нильсона, который известен как алгоритм А* [2,3].

Классическим примером служит игра Lines (Color Lines, в народе Шарики), изобретённая Олегом Дёминым, Геннадием Денисовым и Игорем Ивкиным и разработанная российской компанией Gamos в 1992 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовская, О.И. Синтез управления дискретной системы на ориентированном графе / О.И. Садовская // Эффективные инструменты современных наук – 2012: материалы VIII международной научно-практической конференции, Прага, 27 апреля – 05 мая 2012 г. – Т. 30. – С. 3–6.
2. Нильсон, Н. Искусственный интеллект: методы поиска решений = Problem-solving Methods in Artificial Intelligence / Н.Нильсон; пер. с англ. В.Л. Стефанюка; под ред. С.В. Фомина. – М.: Мир, 1973. – 273 с.
3. Лорьер, Ж.-Л. Системы искусственного интеллекта / Ж.-Л. Лорьер; пер. с фр.; ред. В.Л. Стефанюк. – М.: Мир, 1991. – 568 с.

А. А. ГУНОСОВ, А. А. КОЗИНСКИЙ

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПОРТАЛА НА ОСНОВЕ CMS DRUPAL

Для администрирования динамического веб-сайта необходима система управления его контентом. В состав выполняемых задач такой системы, как правило, входят: предоставление графического интерфейса для редактирования материалов пользователей, каталогизация, разграничение прав доступа к компонентам сайта. В зависимости от назначения сайта в состав системы управления контентом могут включаться дополнительные функции. Систему управления можно разрабатывать с «чистого листа», используя один из языков веб-программирования, например, PHP, ASP.NET и т. п. При разработке может использоваться какой-либо фреймворк. Фреймворк представляет собой каркас веб-приложения с готовой реализацией некоторых стандартных функций. Другой подход, который значительно ускоряет решение задач управления, – использование готовой CMS, такой как Joomla, Drupal или WordPress.

Для разработки информационного образовательного портала нами выбрана CMS Drupal. Выбор объясняется тем, что Drupal имеет открытый и документированный исходный код и сообщество пользователей. Такие условия облегчают поиск необходимой информации и решение возникающих проблем. CMS имеет модульную структуру, что позволяет изменять функциональность сайта путем установки и конфигурирования соответствующих модулей [1, с. 17]. Например, для создания блога на портале нами был использован модуль «Blog». Использование модуля «Organic Groups» дает возможность объединять пользователей в группы и предоставить им соответствующие права доступа к содержимому портала. С помощью модуля «Backup and Migrate» возможна настройка автоматического создания резервных копий портала, что повышает безопасность хранимых данных. Drupal располагает встроенной системой кеширования, способной сократить время генерации страницы. Одним из недостатков CMS Drupal является относительная сложность системы, что увеличивает время первоначального ее освоения. После окончания тестирования образовательный портал будет размещен по url: <http://www.webinedu.org>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелансон, Б. Профессиональная разработка сайтов на Drupal 7 / Б. Мелансон [и др.]. – СПб.: Питер, 2013. – 688 с

Н. В. ГУЦКО¹, Ю. В. ГОРБАТОВА²

¹МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

²БГУ им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия)

О СТРОЕНИИ ГРУПП ШМИДТА С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ВТОРЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

На протяжении многих лет развития теории конечных групп авторы обращались к вопросу влияния свойств i -ых максимальных подгрупп (при фиксированном i) на строение группы, что привело к появлению большого числа публикаций в направлении развития теории обобщенно максимальных подгрупп конечных групп.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G , если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G . Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее.

Связь между 2-максимальными подгруппами группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении получили Редди [1], описавший неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хупперт [2], установивший сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы нормальны. Эти результаты стимулировали многие другие исследования в данном направлении. Например, в работах Судзуки [3] и Янко [4] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено В.А. Белоноговым в работе [5].

Отмеченные выше результаты Редди и Хупперта получили свое дальнейшее развитие в работе Агравала [6], где доказано, что группа G является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы S -квазинормальны (подгруппа H группы G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G), а также в работе Л.Я. Полякова [7], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В дальнейшем в работе [8] было получено полное описание групп, у которых каждая вторая максимальная подгруппа перестановочна со всеми первыми максимальными подгруппами.

В настоящее время теория обобщенно максимальных подгрупп является весьма развитым учением, обогащенным большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Вместе с тем имеется и ряд открытых задач в данном направлении. В данной работе приводится теорема, описывающая строение групп Шмидта, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна с каждой 4-максимальной подгруппой.

Теорема. Пусть $G=[P]Q$ – группа Шмидта, где P и Q – силовские p -подгруппа и q -подгруппа группы G соответственно. В том и только в том случае в группе G каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами из G , когда либо $|G|=p^\alpha q^\beta$ для $\alpha+\beta \leq 4$, либо G является группой одного из следующих типов:

- (1) G – группа с абелевыми силовскими подгруппами;
- (2) $G=[P]Q$, где $|Q|=q^2$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $\Phi(P)$ – единственная 2-максимальная подгруппа в P ;
- (3) $G=[P]Q$, где $|Q|=q$, $|\Phi(P)| \leq p^2$ и $P_3 \subseteq \Phi(P)$ для каждой 3-максимальной подгруппы P_3 из P .

ЛИТЕРАТУРА

1. R`edei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. R`edei // Acta Math. – 1950. – Т. 84. – S. 129–153.
2. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, N 4. – P. 686–695.
4. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.
5. Белоногов, В.А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В.А. Белоногов // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, № 1. – С. 21–32.
6. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
7. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.
8. Легчекова, Е.В. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 27–29.

М. И. ЕФРЕМОВА, О. С. ДЫБА

МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

О ПОДГРУППОВЫХ Х-ФУНКТОРАХ n -АРНОЙ ГРУППЫ

Реализация идеи о замене в определении группы ассоциативной и однозначно обратимой слева и справа бинарной операции на ассоциативную и однозначно обратимую на каждом месте n -арную операцию привела к возникновению понятия n -арной группы. Напомним [1], что система $\langle X, () \rangle$ с одной n -арной операцией $()$ называется n -арной группой, если эта операция ассоциативна, и в X разрешимо каждое из уравнений $(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = a$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть X – произвольный класс n -арных групп. Сопоставим с каждой n -арной группой G некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Мы будем говорить, следуя [2], что τ – подгрупповой X -функтор, если выполняются следующие условия:

- 1) $G \in \tau(G)$ для любой n -арной группы $G \in X$,
- 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $A, B \in X$ и для любых n -арных групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Целью данной работы является построение примеров подгрупповых X -функторов. Вся терминология стандартна и заимствована из [1–3].

Напомним [1], что подгруппа H n -арной группы G называется инвариантной в G , если для любого элемента

$x \in G$ имеет место равенство $\begin{bmatrix} n-1 \\ x H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i-1 & n-1 \\ H x H \end{bmatrix}$, где $i=2,3,\dots,n$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема. Пусть для каждой конечной n -арной группы $G \in X$ множество

$$\tau(G) = \{G\} \bigcup \Omega,$$

где Ω – совокупность всех инвариантных максимальных подгрупп в G . Тогда τ – подгрупповой X -функтор.

Теорема. Пусть для каждой конечной n -арной группы $G \in X$ множество

$$\tau(G) = \{G\} \bigcup \Omega,$$

где Ω – совокупность всех неинвариантных максимальных подгрупп в G . Тогда τ – подгрупповой X -функтор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

М. И. ЕФРЕМОВА, А. А. КАМЫШ

МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

МАКСИМАЛЬНЫЕ τ -ПОДКЛАССЫ ШУНКА В X

Основным объектом исследования в данной работе являются τ -классы Шунка n -арных групп в произвольном классе n -арных групп. Множество всех классов Шунка конечных групп по включению образует решетку. Особый класс алгебраических систем с перестановочными конгруэнциями образуют n -арные группы. Напомним [3], что система $\langle X, () \rangle$ с одной n -арной операцией $()$ называется n -арной группой, если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждое из уравнений $(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = a$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Вся терминология стандартна и заимствована из [1–5]. Пусть X – произвольный класс n -арных групп. Сопоставим с каждой n -арной группой G некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Мы будем говорить, следуя [4], что τ – подгрупповой X -функтор, если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$ для любой n -арной группы $G \in X$, 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $A, B \in X$ и для любых n -арных групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Следуя [5], мы обозначаем через M_G наибольшую (по включению) конгруэнцию π на G со свойством $\pi M = M$. Неединичная n -арная группа называется [1] τ -примитивной, если у G имеется такая подгруппа M , что $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$ и M_G – нулевая конгруэнция на G . Будем говорить, что класс n -арных групп M τ -примитивно замкнут в X , если $M \subseteq X$ и классу M принадлежит каждая такая группа из X , у которой все ее τ -примитивные факторгруппы принадлежат M .

Следуя [1], τ -классом Шунка n -арных групп в X будем называть всякий гомоморф n -арных групп, τ -примитивно замкнутый в классе n -арных групп X .

Теорема. Пусть $G \in X$ – n -арная группа, принадлежащая τ -классу Шунка в X , H – его τ -подкласс Шунка в X , не содержащий G . Тогда в F существует M – τ -подкласс Шунка в X , содержащий H , и максимальный среди всех τ -подклассов Шунка в X , принадлежащих F и не содержащих G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремова, М.И. Решетки τ -классов Шунка n -арных групп: препринт / М.И. Ефремова, А.Н. Скиба. – Гомель, ГГУ им. Ф.Скорины, 2002. – 23 с.
2. Мальцев, А.И. Алгебраические системы / М.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
3. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
4. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
5. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

М. И. ЕФРЕМОВА, А. С. ТУКАЧ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ОПЕРАТОРЫ ЗАМЫКАНИЯ НА КЛАССАХ n -АРНЫХ ГРУПП

Система $\langle X, () \rangle$ с одной n -арной операцией $()$ называется n -арной группой [1], если эта операция ассоциативна и в X разрешимо каждое из уравнений $(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = a$, где i пробегает $1, 2, \dots, n$.

Пусть \mathfrak{X} и \mathfrak{M} – произвольные классы n -арных групп. Напомним [3], что оператор C называется: 1) оператором расширения, если $\mathfrak{X} \subseteq C\mathfrak{X}$; 2) идемпотентным оператором, если $C\mathfrak{X} = C(C\mathfrak{X})$; 3) монотонным оператором, если выполняется следующее условие: если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$, то $C\mathfrak{X} \subseteq C\mathfrak{M}$. Оператор C называется [3] оператором замыкания, если он является одновременно монотонным, идемпотентным и оператором расширения.

Пусть \mathcal{X} – произвольный класс n -арных групп. Сопоставим с каждой n -арной группой G некоторую систему ее подгрупп $\tau(G)$. Мы будем говорить, следуя [2], что τ – подгрупповой \mathcal{X} -функтор, если выполняются следующие условия: 1) $G \in \tau(G)$ для любой n -арной группы $G \in \mathcal{X}$, 2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $A, B \in \mathcal{X}$ и для любых n -арных групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Если \mathfrak{H} – подкласс в \mathfrak{X} , то, следуя [3], через $N\mathfrak{X}$ будем обозначать класс всех гомоморфных образов всех n -арных групп из \mathfrak{H} . Введем еще один оператор на классах n -арных групп. Через $P_\tau \mathfrak{H}$ обозначим класс всех таких n -арных групп $G \in \mathfrak{X}$, что $G/M_G \in \mathfrak{H}$ для любой $M \in \tau(G) \setminus \{G\}$. По определению, $G \in P_\tau(\mathfrak{H})$, если $\tau(G) = \{G\}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Для любого класса n -арных групп $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$

- 1) оператор N является оператором замыкания,
- 2) оператор $P_\tau N$ является оператором замыкания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

А. Е. ЗАГОРСКИЙ, М. В. МАЛАЩЕНКО, В. В. ШЕПЕЛЕВИЧ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ В HTML5

В настоящее время стандарт языка HTML5 активно внедряется многими веб-разработчиками. С использованием этого популярного языка гипертекстовой разметки страниц разворачиваются крупные веб-порталы, коммерческие и развлекательные сайты (см., например, статистику использования HTML5 [1]). Новый стандарт включил в язык html большое количество удобных инструментов. Появилась возможность добавлять на страницу видео и аудиозаписи, размещать на холсте интерактивные рисунки, использовать возможности геолокации и взаимодействия с пользователем посредством форм и локальных хранилищ данных [2].

Указанная выше интерактивность HTML5 представляет большой интерес для образовательных задач на различных ступенях обучения. Создавая наглядные модели изучаемых явлений и предметов с возможностью взаимодействия с пользователем и изменения параметров исследуемой системы, можно значительно повысить качество усвоения материала с меньшими затратами времени. В этом смысле стандарт HTML5 является не только передовым решением с точки зрения технологии создания моделей, но и предоставляет разработчикам невиданные ранее инструменты по созданию интерактивных и виртуальных моделей. Ещё одним плюсом при использовании HTML5 для моделирования является его общедоступность: любой современный браузер понимает данный стандарт и корректно с ним работает.

Рассмотрим основные приёмы создания интерактивных моделей в HTML5 с использованием холста (canvas). Структура html документа в нашем случае будет предельно проста:

```
<!DOCTYPE HTML>
<html>
  <head>
    <script src="model.js"></script>
  </head>
  <body>
    <canvas id="example"></canvas>
    <script>init()</script>
  </body>
</html>
```

Заголовок документа содержит строку с подключаемым модулем `model.js`. В тело документа добавлен холст с идентификатором `example` и вызов метода `init()` из модуля `model.js`. Свойства холста и методы взаимодействия с пользователем реализованы на языке JavaScript в модуле `model.js`, рассмотренном ниже.

В начале модуля заданы классы `round` и `rect`, экземпляры этих классов используются для создания фона холста и точки на экране, с которой будет взаимодействовать пользователь.

```
function round(x, y, r) // класс, задающий круг
{
  this.x = x; // координата x
  this.y = y; // координата y
  this.r = r; // радиус
  this.draw = function draw(color, globalAlpha)
  {
    context.globalAlpha = globalAlpha;
    context.fillStyle = color;
    context.beginPath();
    context.arc(this.x, this.y, this.r, 0, Math.PI * 2, true);
    context.fill();
  };
}
function rect(x, y, width, height) // класс, задающий прямоугольник
{
  this.x = x; // координата x
  this.y = y; // координата y
  this.width = width; // ширина
  this.height = height; // высота
  this.draw = function(color, globalAlpha)
  {
    context.globalAlpha = globalAlpha;
    context.fillStyle = color;
    context.fillRect(this.x, this.y, this.width, this.height);
  };
}
```

Следующим шагом будет описание метода, реагирующего на возникновение события `mousedown` (пользователь щёлкнул по холсту). Результатом работы метода будет перемещение точки в позицию, заданную курсором мыши.

```
function mousedown(evt) {
  var mouseX = evt.pageX - canvas.offsetLeft;
  var mouseY = evt.pageY - canvas.offsetTop;
  point.x = mouseX;
  point.y = mouseY;
}
```

Элементы холста необходимо отобразить, это задача метода `draw`.

```
function draw()
{
  background.draw("#ffa", 0.5); // закрашиваем фон
  point.draw("#00f", 0.5); // рисуем точку
}
```

Заключительным блоком в программе будет метод `init`, именно он вызывается из `html` документа. Метод `init` создает экземпляры описанных ранее классов фона и точки, устанавливает связь между объектами и холстом и затем отображает полученную интерактивную модель, реагирующую на действия пользователя.

```
function init()
{
  background = new rect(0, 0, 800, 400);
  point = new round(400, 285, 10);
  canvas = document.getElementById("example");
  canvas.width = background.width;
  canvas.height = background.height;
  context = canvas.getContext("2d");
  canvas.onmousedown = mousedown;
  setInterval(draw, 1000 / 12); // перерисовываем 12 раз в секунду
}
```

Используя приведенный выше подход несложно получить гораздо более сложные модели, в том числе с интерактивными изображениями, взаимодействующими объектами, учетом физических закономерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Websites using HTML5 DocType [Электронный ресурс] / <http://www.trends.builtwith.com>. – Режим доступа: <http://trends.builtwith.com/docinfo/HTML5-DocType>. – Дата доступа: 03.02.2014.
2. HTML5 – введение в новый стандарт [Электронный ресурс] / <http://www.adnotes.ru>. – Режим доступа: <http://adnotes.ru/page/html5-vvedenie-v-novyyj-standart-chast-1>. – Дата доступа: 03.02.2014.

В. С. ЗАЙКО, О. В. МАТЫСИК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение первого рода $Ax = y_\delta$, где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Пусть $0 \in SpA$, тогда рассматриваемая задача некорректна. Здесь $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x операторного уравнения. Для его отыскания применим явный метод итераций с переменным шагом:

$$\begin{aligned} x_{n+1,\delta} &= x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{3n+1} &= \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Ниже, под сходимостью метода (1) понимается утверждение о том, что приближения (1) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения $Ax = y_\delta$ при подходящем выборе n и достаточно малых δ . Предполагаем, что $\|A\| = 1$.

Априорный выбор числа итераций $n_{\text{опт}}$ получен в предположении, что точное решение x истокорпредставимо, т. е. $x = A^s z$, $s > 0$ [1]. Однако не всегда имеются сведения об элементе z и степени истокорпредставимости s . Тем не менее, метод (1) становится вполне эффективным, если воспользоваться следующим *правилом останова по невязке*: определим момент m останова процесса (1) условием:

$$\left. \begin{aligned} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (2)$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила останова (2) к методу (1). Рассмотрим при $n = 3p$, $p = 1, 2, \dots$ семейство функций:

$$g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/3} (1 - \beta\lambda)^{n/3} (1 - \gamma\lambda)^{n/3} \right].$$

При условиях $0 < \alpha < 2$, $\alpha + \beta < 8$, $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)(1 - \gamma\lambda)| < 1$ получим [1]:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |g_n(\lambda)| &\leq \frac{n(\alpha + \beta + \gamma)}{3}, \\ \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} |1 - \lambda g_n(\lambda)| &= \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \left| (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \right| \leq 1, \\ 1 - \lambda g_n(\lambda) &= (1 - \alpha\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \beta\lambda)^{\frac{n}{3}} (1 - \gamma\lambda)^{\frac{n}{3}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, 1], \end{aligned}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^s \left[\frac{n(\alpha + \beta + \gamma)e}{3} \right]^{-s}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty.$$

Справедливы

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Тогда для любого $v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$. Если для некоторой подпоследовательности $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $\omega_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Теорема. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq 1$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ ($m = 3p$, $p = 1, 2, 3, \dots$) в методе (1) выбран по правилу (2), тогда $x_{m,\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$. Если же $x = A^s z$, $s > 0$, то справедливы оценки

$$m \leq 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)}, \quad \|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \left\{ 3 + \frac{3(s+1)}{(\alpha + \beta + \gamma)e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{1/(s+1)} \right\} \delta.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Матысик, О.В. Априорные оценки погрешности в явном итерационном методе с переменным шагом решения некорректных задач / О.В. Матысик, В.С. Зайко // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: материалы рег. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 октября 2013 г. / Брест. гос. ун-т; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2013. – С. 14.

Е. В. ЗУБЕЙ

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПОДГРУППЫ ЛИ ГРУППЫ ЛИ ВРАЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Инвариантные объекты играют важную роль для характеристики исследуемой группы движений. Целью работы является нахождение инвариантных подпространств подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского.

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1, т. е. пространство 1R_4 – пространство Минковского. Пусть G – группа Ли движений пространства Минковского, H – группа Ли вращений пространства Минковского, \overline{G} – алгебра Ли группы Ли G , \overline{H} – алгебра Ли группы Ли H . Рассмотрим в пространстве 1R_4 базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\overline{e}_1^2 = -1$, $\overline{e}_2^2 = \overline{e}_3^2 = \overline{e}_4^2 = 1$, $(\overline{e}_i, \overline{e}_j) = 0, i \neq j$. Базис $\{i_1, i_2, \dots, i_{10}\}$ в алгебре Ли \overline{G} зададим следующим образом: $i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52}, i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}$, где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке β -м столбце стоит единица, а остальные элементы нули.

Для векторов пространства \overline{H} определяется операция $[a, b]$ – коммутирование, а сам результат называется коммутатором.

Чтобы вектор a с координатами (a_1, a_2, a_3, a_4) был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли \overline{G}_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot a$, где c – любое из \overline{G}_i . В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса \overline{G}_i .

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu b, b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b. \quad (1)$$

Будем рассматривать алгебру Ли \overline{H} . Элементы базиса этой алгебры будем задавать в виде:

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работе находятся инвариантные одномерные и двумерные подпространства для групп Ли $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}$, соответствующих алгебрам Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$,

$\overline{G_7}, \overline{G_8}, \overline{G_9}, \overline{G_{10}}, \overline{G_{11}}, \overline{G_{12}}$ и $\overline{G_{13}}$, задаваемых соответственно базисами $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Теорема 1 Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные пространства $\{pe_1 + qe_3\}$ и следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$.

Теорема 2 Относительно группы G_2 инвариантны такие одномерные пространства, как: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{pe_2 + qe_4\}$, и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2 + \lambda e_4\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_1 + e_3, e_2\}, \{e_1 + e_3, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}, \{pe_2 + qe_4, e_1, e_3\}$.

Теорема 3 Относительно группы G_3 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 4 Относительно группы G_4 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 5 Относительно группы G_5 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 + e_3\}, \{e_1 - e_3\}, \{e_1, e_3\}$ и $\{e_2, e_4\}$, а также трехмерные подпространства: $\{e_1 + e_3, e_2, e_4\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 6 относительно группы G_6 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 7 Относительно группы G_7 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2\}$ и $\{e_1 - e_3, e_4\}$, а также трехмерное подпространство $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 8 Относительно группы G_8 инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2\}, \{e_1 - e_3, e_4\}$ и $\{e_1 - e_3, e_2 + \lambda e_4\}$, а также трехмерное подпространство: $\{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 9 Относительно группы G_9 инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 10 Относительно группы G_{10} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

Теорема 11 Относительно группы G_{11} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1\}, \{e_2, e_3, e_4\}$.

Теорема 12 Относительно группы G_{12} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_4\}, \{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 13 Относительно группы G_{13} инвариантны только следующие одномерное и трехмерное подпространства: $\{e_1 - e_3\}, \{e_1 - e_3, e_2, e_4\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдов, А.А. Классификация подмногообразий однородных пространств / А.А.Юдов // Электронный курс лекций для магистрантов и аспирантов факультета или специальности, Брест, объем – 3,2 Мб, 1 файл, 195 с., 2013.

УЛЬТРАЗВУКОВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

Получить результат о наличии дефектов в микроструктурах имеет большое значение для того, чтобы оценить срок службы материала/компонента в атомной, химической промышленности, обследованиях газопроводов до и во время их эксплуатации. При поставке компонентов и материалов именно неразрушающий контроль позволяет определить, какой из компонентов свободен от дефектов и соответствует той или иной требуемой микроструктуре. Для того чтобы отслеживать старение материала в процессе эксплуатации, например, так называемую усталость, оценивать повреждения при ползучести и измерять остаточное напряжение, необходимо разрабатывать специальные методологии и процедуры.

Ультразвуковой контроль имеет большое количество методов, а также типов применяемых волн, широким диапазоном частот. Использование его больших возможностей применительно к дефектоскопии конкретных видов изделий составляет задачу разработки методики контроля. В нее входят следующие основные вопросы: выбор схемы контроля – метода дефектоскопии, типа волн, поверхности, через которую вводят УЗ-волны, угла ввода [1].

Контроль физико-механических свойств материалов – одно из важных направлений неразрушающего контроля качества материалов, деталей, изделий и конструкций. Неразрушающий контроль позволяет перейти от выборочной проверки этих свойств на специально изготовленных образцах к их стопроцентному контролю на готовых изделиях без их разрушения или повреждения. Это повышает достоверность оценки качества продукции и сокращает расходы. Контроль акустическими методами основан на установлении взаимосвязи физико-механических, технологических, структурных характеристик материалов и изделий с акустическими характеристиками.

К основным физико-механическим свойствам материалов, определяемым акустическими методами, относят: упругие (модуль нормальной упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона); прочностные (прочность при растяжении, сжатии, изгибе, кручении, срезе и др.); технологические (плотность, пластичность, влажность, содержание отдельных компонентов, гранулометрический состав и др.); структурные анизотропия материала, кристалличность или аморфность, размеры кристаллов, упорядоченность кристаллической решетки); размеры, форма и содержание включений, например графитных включений в чугунах; глубина поверхностной закалки и ряд других. Акустические методы позволяют оценивать только те свойства материала, которые влияют на условия возбуждения, прохождения, отражения и преломления упругих волн или на режимы колебаний ОК. Это скорости распространения волн различных типов, волновые сопротивления материалов, коэффициенты поглощения и рассеяния упругих волн, собственные частоты конструкций, их добротность, механический импеданс, уровень обратного рассеяния, эффективность ЭМА-преобразования, нелинейные искажения волн.

Тем не менее, контроль свойств материалов на основе их корреляционных связей с акустическими параметрами широко применяется на практике. Например, стандартизованы ультразвуковой метод контроля бетона, основанный на корреляции прочности со скоростью распространения упругих волн, и метод контроля качества абразивных инструментов по их собственным частотам [2].

Аппаратура УЗ-контроля обычно включает: ультразвуковые импульсные дефектоскопы с преобразователями, комплект стандартных образцов (эталонов), испытательные образцы, а также вспомогательные приспособления или устройства для соблюдения параметров контроля и сканирования.

Ультразвуковой дефектоскоп предназначен для излучения УЗ-колебаний, приема эхо-сигналов, установления размеров выявленных несплошностей и определения их координат [3].

Исследования проводились на заготовке вала из стали 40 поковка. Использовался датчик MSEB 4 с характеристиками:

- эффективная частота $4 \pm 0,2$ МГц;
- размер пьезоэлемента 3,5 x 10 мм;
- рабочая поверхность диаметром 16 мм;
- диапазон контроля по стали от 1 до 1500 мм.

Задаваемая скорость звука в материале объекта исследования 5198 м/с.

Для получения экспериментальных данных был использован прибор Krautkramer usm 35 с раздельно-совмещенным прямым датчиком MSEB 4. С помощью данного вида приборов возможно производить различного вида измерения и проводить контроль.

На рисунке видны сигналы от донной поверхности и сигнал от поверхности дефекта. Путь, пройденный сигналом при ультразвуковом контроле, $S=79$ мм, а диаметр вала равен 80 мм. Данная погрешность допустима для ультразвукового контроля [4–5].



Сигнал от дефектной поверхности Сигнал от донной поверхности

56.0 дБ – усиление сигнала, a-УРОВ., a-НАЧ., a-ШИР. – характеристики строга
Рисунок – Показания прибора usm 35 при ультразвуковом исследовании вала эхо-методом

ЛИТЕРАТУРА

1. Балдев, Р. Применения ультразвука / Р. Балдев. – М.: Техносфера, 2006. – 576 с.
2. Ермолов, И.Н. Неразрушающий контроль / И.Н. Ермолов. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.
3. Алешин, Н.П. Ультразвуковая дефектоскопия / Н.П. Алешин. – Минск: Высшэйшая школа, 1987. – 271 с.
4. Троицкий, В.А. Ультразвуковой контроль: дефектоскопы, нормативные документы, стандарты по УЗК / В.А. Троицкий. – Киев: Феникс, 2006. – 224 с.
5. Техническое описание и инструкция по эксплуатации прибора krautkramer usm 35 – 153 с.

Н. С. КАРНАУХОВ

МГВАК (г. Минск, Беларусь)

ПРИМЕНЕНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ СРЕДСТВ ПАКЕТА SIMULINK & MATLAB ДЛЯ УПРОЩЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

В настоящее время одна из наиболее важных и наиболее трудоёмких задач при проектировании автономных систем генерирования – это исследование систем генерирования электроэнергии, в состав которых входят электрические машины. Поэтому актуальным является вопрос разработки простых инженерных методов, алгоритмов и программ для персонального компьютера, позволяющих наиболее просто, с наименьшими затратами проводить исследования систем генерирования и электрических машин. Одним из таких методов является метод структурного моделирования из пакета Simulink.

В работе показано, что основными элементами схемы исследуемой автономной системы генерирования электроэнергии являются: бесконтактный генератор переменного тока типа ГТ и регулятор напряжения. В пакете Simulink программы MatLab они задаются каждый своим блоком типа Transfer Fcn. Звенья, характеризующие действия внешних возмущений (частоты вращения вала авиадвигателя γ и нагрузки ρ и χ – активной и индуктивной соответственно) задаются блоками, типа Gain [1].

Для исследования на персональном компьютере переходных и установившихся процессов по напряжению в системах генерирования исходная структурная схема (при допущениях $\gamma = 1$, $\chi = 1$) преобразована к виду, на котором выход каждого блока системы генерирования электроэнергии обозначен цифрой, являющейся одновременно и номером блока в схеме [1]. Звенья описываются стандартными подпрограммами из библиотеки Simulink Library программы MatLab. Кроме того, при разработке математической модели системы генерирования приняты допущения, обычные в такого рода исследованиях, которые не дают существенных расхождений получаемых результатов с опытом [1]: магнитная проницаемость стали генератора равна бесконечности; распределение магнитного поля каждой из обмоток генератора вдоль окружности воздушного зазора машины синусоидально, то есть влияние высших пространственных гармоник магнитного поля не учитывается; демпферная клетка эквивалентирована короткозамкнутыми контурами D и Q , оси которых параллельны продольной и поперечной осям ротора; параметры фазных обмоток статора идентичны; поток рассеяния обмотки возбуждения равен нулю [1].

Такой подход позволяет минимизировать трудоемкость и затраты при разработке математической модели и исследовании статических и динамических характеристик автономной системы генерирования при изменении сигналов по цепям возбуждения и нагрузки.

В работе проведена оценка адекватности математической модели синхронного генератора реальному объекту путём сравнения результатов расчёта на персональном компьютере динамических и статических характеристик бесконтактного трёхфазного синхронного генератора, мощностью 30 кВ·А, с аналогичными характеристиками, полученными в результате натурного эксперимента [2]. Имеющиеся различия в результатах эксперимента и расчета объясняются, во-первых, применяемыми при составлении математической модели допущениями и, во-вторых, всегда имеющими место техническими отклонениями параметров генератора от их номинальных значений.

Из результатов эксперимента видно, что при моделировании учет демпферных контуров в уравнениях математической модели трёхфазного синхронного генератора оказывает незначительное влияние на протекание переходных процессов лишь на интервале времени, близком к моменту коммутации нагрузки. При этом при действии возмущений по цепям возбуждения и нагрузки снижаются величины перерегулирования напряжения приблизительно на 1–1,5%. На время протекания переходных процессов учет демпферных контуров существенного влияния не оказывает [1].

Анализ кривых изменения напряжения синхронного генератора с учетом и без учета трансформаторных ЭДС в математической модели электрической машины показывает, что качественно процессы протекают аналогично. Однако, при учете трансформаторных ЭДС имеют место большие отклонения напряжения в моменты действия возмущений в цепях возбуждения и нагрузки. При этом величины отклонений напряжения по сравнению со значениями напряжения, полученными экспериментально, составляют приблизительно 6–8% в сторону увеличения. При неучете трансформаторных ЭДС величины отклонений напряжения в моменты действия возмущений от значений, полученных экспериментально, занижены на 8–14%. Помимо этого, при расчетах без учета трансформаторных ЭДС время переходного процесса увеличивается на 15–30% [1].

Таким образом, анализ экспериментальных и расчетных кривых переходных процессов генератора без учёта демпферных контуров и трансформаторных ЭДС показал их удовлетворительное совпадение как в режиме работы при воздействии возмущений по цепи возбуждения, так и при воздействии возмущений по цепи нагрузки. Расчетные и экспериментальные значения напряжения генератора в установившихся и переходных режимах не отличаются друг от друга более чем на 11%, что вполне удовлетворяет требованиям инженерных расчетов.

Моделирование переходных и установившихся процессов по напряжению в системе генерирования выполнялось при коммутациях нагрузки от 0 до 160% и при различных параметрах элементов системы генерирования, а именно различных регуляторах напряжения (П, ПИ и ПИД-регуляторы). Исследования переходных процессов в системе генерирования переменного тока показали, что наиболее эффективным является ПИД-регулятор, а также позволили определить пределы допустимых значений ступенчатых характеристик переходного напряжения. При этом длительность переходных процессов (время регулирования) при реализации закона ПИД-регулятора сокращается до 0,02–0,05 с при одновременном уменьшении диапазона изменения напряжения с 58–160 В до 100–150 В. Эти показатели качества электроэнергии удовлетворяют современным требованиям, предъявляемым к системам электроснабжения, бортовому оборудованию воздушных судов [1].

Таким образом, разработанная методика и программа расчета могут быть использованы для моделирования как переходных, так и установившихся электромагнитных процессов в системе генерирования переменного трёхфазного тока с различными регуляторами напряжения при помощи моделирования в программе MatLab 7.01 и выше.

Однако при этом нужно учитывать:

1. При исследовании переходных и установившихся режимов СГ допустимо пренебрегать влиянием демпферных контуров.
2. Расчёты переходных процессов СГ целесообразно проводить с учетом влияния трансформаторных ЭДС, ибо в противном случае при изменении режимов работы генератора перерегулирование напряжения будут увеличены на 5–18%, а время переходного процесса – на 15–35% по сравнению с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карнаухов, Н.С. Разработка виртуальной лабораторной установки для исследования переходных процессов в автономной системе генерирования переменного тока с применением пакета Simulink & MatLab / Н.С. Карнаухов // Тезисы докладов 12-ой Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2013», 12–15 ноября 2013 г., Москва / СПб.: Мастерская печати, 2013. – 647 с.
2. Карнаухов, Н.С. Возможности Simulink & MatLab для организации лабораторных исследований по электромеханическим дисциплинам / Н.С. Карнаухов // Тезисы докладов 18-ой Международной научно-технической конференции «Современные средства связи», 15–16 октября 2013 г., Минск / МГКС, 2013. – 368 с.

Т. С. КИРИЛЬЧУК, А. А. ТРОФИМУК
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

О A_4 -СВОБОДНЫХ ГРУППАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ИНДЕКСАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ПОДГРУППУ ФИТТИНГА

Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

В 1954 году Б. Хупперт доказал сверхразрешимость группы в случае, когда индексы её максимальных подгрупп равны простым числам.

Ф. Холл в 1958 году установил разрешимость группы, у которой индексы максимальных подгрупп есть простые числа или квадраты простых чисел. Более детальное исследование таких групп проведено в работе В.С. Монахова и Е.Е. Грибовской [1].

В работе С.А. Серой [2] получена оценка производной длины A_4 -свободной группы, индексы максимальных подгрупп которой равны простым числам или квадратам простых чисел. В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Следующая теорема показывает, что оценка производной длины фактор-группы $G/\Phi(G)$ сохраняется, если рассматривать только максимальные подгруппы, не содержащие подгруппу Фиттинга.

Теорема. Пусть G – A_4 -свободная группа. Если индексы максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга, равны простым числам или квадратам простых чисел, то производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
2. Серая, С.А. A_4 -свободные группы с ограничениями на индексы максимальных подгрупп / С.А. Серая // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: материалы республиканской научно-практической конф., 24–25 апреля 2013 года / Брест, гос. ун-т; [под общ. ред. И.Г. Кожуха]. – Брест: БрГУ имени А.С. Пушкина, 2013. – С. 167.

А. В. КИРПИЧЕНКОВ, А. П. КОНДРАТЮК
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

МЕТОДЫ ПОИСКОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ САЙТОВ

Поисковая оптимизация сайта – активно развивающаяся в настоящее время ветвь web-технологий.

Под поисковой оптимизацией сайта понимается совокупность методов, обеспечивающих повышение рейтинга сайта в поисковых системах по определенным запросам пользователей. В данной работе выполнен краткий анализ основных методов оптимизации, которые должны использовать разработчики сайтов коммерческой направленности.

1. **Каноникализация.** Как правило, в рамках одного сайта существует несколько дублирующихся страниц, имеющих разный URL. Каноникализация обеспечивает выбор основного URL из этих страниц для последующей индексации в поисковой системе. Для контента, который может быть доступен с разных URL адресов, метод позволяет избежать проблем с его дублированием и обеспечивает корректную индексацию. Основной URL указывается при помощи тега rel="canonical".

2. **Удобные и понятные URL.** Для коммерческих сайтов важно наличие постоянных URL, содержащих в себе ключевые слова. Существующие URL преобразовываются, используя подходящие ключевые слова. В результате получаются URL-адреса, ориентированные на пользователей и поисковые системы.

Для реализации данного механизма в создаваемом нами интернет-магазине [myfishing.url.ph] использовались средства для работы с URL, предоставляемые веб-сервером Apache, в частности, модулем mod_rewrite. Инструкции файла .htaccess, полученные в листинге 1, позволяют скрывать от пользователей расширения файлов, тем самым упрощая текущий URL.

```
<IfModule mod_rewrite.c>
RewriteEngine on
RewriteCond %{REQUEST_FILENAME} !-f [OR]
RewriteCond %{REQUEST_URI} \.(ini|php)$
RewriteRule ^(.*) index.php [L,QSA]
</IfModule>
```

Листинг 1

3. **Ограничения для поисковых роботов.** Для запрета индексирования URL и папок на web-сервере используется файл robots.txt. Данным методом следует пользоваться при необходимости скрыть частную информацию.

4. **Кроссплатформенность.** Сайт должен корректно отображаться во всех популярных браузерах. Отсутствие поддержки сайтом некоторых браузеров приводит к потере части пользователей.

5. **Описание содержимого неиндексируемых элементов.** Ряд элементов сайта, такие, как изображения, анимация, не анализируются поисковиками. При использовании таких элементов их описание включается в тег Alt [1, с. 142–143]. Приведенный метод помогает поисковым системам определить тематику элемента. Пример использования показан в листинге 2.

```
"  
      alt="<?php echo $item["image_description"] ?>">
```

Листинг 2

Контроллер страницы получает из базы данных записи по каждому изображению. С помощью PHP-скриптов формируется тег для изображения в соответствии с правилами оптимизации.

6. **Метатеги.** При помощи метатегов клиентам предоставляется подробная информация о продукции. Метатеги должны содержать привлекательные названия и описания. Их цель – обратить на себя внимание пользователей [2, с. 242–243].

Механизм включения метатегов и заголовков в html-разметку страницы также был реализован нами средствами PHP и MySQL. MVC архитектура сайта позволяет вставлять получаемые из базы данных метатеги в html-страницы с помощью PHP-скриптов. Пример использования показан на листинге 3.

```
<title>'. $title.' </title> <!-- Заголовок -->  
<meta name="keywords" content="'. $metaKeywords.'" /> <!-- Ключевые слова -->  
<meta name="description" content="'. $metaDescription.'" /> <!-- Описание -->
```

Листинг 3

7. **Оптимизация контента.** Для оптимизации страниц и контента необходимо обратить внимание на следующие моменты:

а) На страницах с товаром должна содержаться цена. Пользователи не должны прилагать усилий, чтобы узнать цену интересующего их товара.

б) На сайте должна размещаться только точная, достоверная и актуальная информация.

Следует отметить, что продвижение сайта в поисковых системах является комплексным мероприятием, включающим в себя вышеперечисленные методы. Создание успешной и адаптируемой коммерческой системы является следствием использования методов поисковой оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашманов, И. Оптимизация и продвижение сайтов в поисковых системах / И. Ашманов, А. Иванов. – М.: Питер, 2011.
2. SEO-искусство раскрутки сайтов / Э. Энж [и др.]. – М.: БХВ-Петербург, 2013.

И. Н. КЛИМАШЕВСКАЯ

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

КЛАССЫ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ ИМЕЮЩИХ РЕШЕНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Одной из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений является выделение дифференциальных уравнений и их систем, решения которых обладают некоторыми специфическими свойствами. Особую актуальность имеют задачи, связанные с выделением классов уравнений и систем, решения которых не имеют подвижных особенностей неалгебраического характера. Задачи такого типа ставили и решали многие исследователи, начиная с Пенлеве.

В работе рассматривается система вида:

$$\frac{dx}{dz} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dz} = Q(x, y), \quad (1)$$

где x, y и z – комплексные переменные, P и Q – многочлены относительно x и y .

Пусть представления многочленов P и Q по степеням x и y имеют вид:

$$P = \sum_{i=0}^{p_1} P_i^{(1)}(y)x^{p_1-i} = \sum_{j=0}^{p_2} P_j^{(2)}(x)y^{p_2-j},$$

$$Q = \sum_{i=0}^{q_1} Q_i^{(1)}(y)x^{q_1-i} = \sum_{j=0}^{q_2} Q_j^{(2)}(x)y^{q_2-j}.$$

Очевидно, что любое решение

$$x = x(z), \quad y = y(z) \tag{2}$$

системы (1) обладает при $z \rightarrow z_0$ одним из следующих свойств

$$x(z) \rightarrow x_0, \quad y(z) \rightarrow y_0, \tag{3}$$

$$x(z) \rightarrow \infty, \quad y(z) \rightarrow y_0, \tag{4}$$

$$x(z) \rightarrow x_0, \quad y(z) \rightarrow \infty, \tag{5}$$

$$x(z) \rightarrow \infty, \quad y(z) \rightarrow \infty, \tag{6}$$

$$x(z) \text{ — неопределенная, } y(z) \rightarrow y_0, \tag{7}$$

$$x(z) \rightarrow x_0, \quad y(z) \text{ — неопределенная,} \tag{8}$$

$$x(z) \text{ — неопределенная, } y(z) \rightarrow \infty, \tag{9}$$

$$x(z) \rightarrow \infty, \quad y(z) \text{ — неопределенная,} \tag{10}$$

$$x(z) \text{ — неопределенная, } y(z) \text{ — неопределенная,} \tag{11}$$

где x_0, y_0 и z_0 — конечные комплексные числа.

В случае (3) точка z_0 будет для решения (2) правильной точкой, в случаях (7)–(11) — существенно особой, а в случаях (4)–(6) может быть как алгебраической особой, так и трансцендентной.

Известно, что если коэффициенты

$$P_0^{(1)}(y) = \text{const}, \quad Q_0^{(2)}(x) = \text{const} \tag{12}$$

и выполнены неравенства

$$p_1 \geq \max\{2, q_1 + 2\}, \quad q_2 \geq \max\{2, p_2 + 2\}, \tag{13}$$

то система (1) не имеет решений (2), обладающих при $z \rightarrow z_0$ свойствами (7)–(11), а также решений (2) со свойствами (4) и (5), для которых точка z_0 была бы трансцендентной. При этих же условиях система (1) имеет хотя бы одно решение со свойством (6), для обеих компонент которого точка z_0 является полюсом, обычным или критическим.

Для выделения простейших классов систем вида (1) с неподвижными трансцендентными и существенно особыми точками необходимо при выполнении условий (12) и (13) указать те системы вида (1), для всех решений которых, обладающих свойством (6), точка z_0 будет алгебраическим полюсом.

Построением полярных решений со свойством (6) проводится с помощью диаграммы Пьюизо. Для этого система (1) путем деления первого уравнения на второе сводится к одному уравнению вида:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{14}$$

Затем, с помощью замены $y = \frac{1}{v}$, уравнение (14) приводится к виду:

$$\frac{dx}{dv} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{P(x, \frac{1}{v})}{Q(x, \frac{1}{v})} \equiv \frac{M(x, v)}{N(x, v)}. \tag{15}$$

Пусть

$$M = \sum_{i=0}^m M_i(v)x^{m-i},$$

$$N = \sum_{j=0}^n N_j(v)x^{n-j},$$

где $m > 0, n > 0$ – целые числа. Очевидно, что при выполнении неравенств (13) имеют место условия $m \geq n + 2$ и $N(x,0) \neq 0$.

Решение $x = x(v)$ уравнения (15) обладающее свойством

$$x(v) \rightarrow \infty \text{ при } v \rightarrow 0 \quad (16)$$

строится с помощью диаграммы Пьюизо.

Для того, чтобы все решения $x(v)$ уравнения (15) со свойством (16) были в точке $v = 0$ полярными (только в этом случае для соответствующих решений (2) системы (1) точка Z_0 будет полюсом для обеих компонент), необходимо и достаточно, чтобы диаграмма Пьюизо имела лишь звенья первого типа. В этом случае количество звеньев диаграммы Пьюизо должно быть, очевидно, нечетным.

Диаграмма Пьюизо будет состоять из одного звена первого типа, если

$$\begin{aligned} \deg P_i^{(1)}(y) &\leq \min\{[ik], p_2\} \quad (i = \overline{1, p_1 - 2}), \\ \deg P_i^{(1)}(y) &\leq p_2 \quad (i = p_1 - 1, p_1), \\ \deg Q_i^{(1)}(y) &\leq q_2 - [k(q_1 - i)] - 1 \quad (i = \overline{1, q_1 - 1}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $k = \frac{q_2 - 1}{p_1 - 1}$, и из трех звеньев первого типа, если в ряду чисел $2, \dots, p_1 - 2$ и $0, 1, \dots, q_1 - 2$ существуют такие

числа m и l , что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} p_1 - q_1 + i - 1 &< m, \\ \deg P_m^{(1)}(y) + 1 - [k'(m - p_1 + q_1 + 1 - l)] &\leq \deg Q_l^{(1)}(y) \leq q_2 - [k_3(q_1 - l)] - 1, \\ q_2 - 1 - [k''(p_1 - m - 1)] &\leq \deg P_m^{(1)}(y) \leq p_2, \\ \deg P_i^{(1)}(y) &\leq [ik_1] \quad (i = \overline{1, p_1 - q_1 - 1 + l}), \\ \deg Q_i^{(1)}(y) &\leq \deg Q_l^{(1)}(y) - [k_1(l - i)] - 1 \quad (i = \overline{0, l - 1}), \\ \deg P_i^{(1)}(y) &\leq \deg P_m^{(1)}(y) - [k_2(m - i)] - 1 \quad (i = \overline{p_1 - q_1 + l, m - 1}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \deg Q_i^{(1)}(y) &\leq \deg P_m^{(1)}(y) - [k_2(m - p_1 + q_1 + 1 - i)] \quad (i = \overline{l + 1, m - p_1 + q_1}), \\ \deg Q_i^{(1)}(y) &\leq q_2 - [k_3(q_1 - i)] \quad (i = m - p_1 + q_1 + 1), \\ \deg P_i^{(1)}(y) &\leq \min\{p_2, q_2 - [k_3(p_1 - i - 1)] - 2\} \quad (i = \overline{m + 1, p_1 - 2}), \\ \deg Q_i^{(1)}(y) &\leq q_2 - [k_3(q_1 - i)] - 1 \quad (i = \overline{m - p_1 + q_1 + 2, q_1 - 1}), \\ \deg P_i^{(1)}(y) &\leq p_2 \quad (i = p_1 - 1, p_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k' &= \frac{\deg P_m^{(1)}(y)}{m}, \quad k'' = \frac{q_2 - \deg Q_l^{(1)}(y)}{q_1 - l}, \quad k_1 = \frac{\deg Q_l^{(1)}(y) - 1}{p_1 - q_1 - 1 + l}, \\ k_2 &= \frac{\deg P_m^{(1)}(y) - \deg Q_l^{(1)}(y) + 1}{m - p_1 + q_1 + 1 - l}, \quad k_3 = \frac{q_2 - \deg P_m^{(1)}(y) - 1}{p_1 - m - 1}. \end{aligned}$$

Итак доказана

Теорема. Если выполнены условия (12), (13), а также (17) или (18), то система (1) не имеет решений (2) с подвижными трансцендентными и существенно особыми точками.

Таким образом, указаны простейшие классы автономных систем двух дифференциальных уравнений, не имеющих решений с подвижными неалгебраическими особыми точками.

М. А. КНЯЗЕВ, Н. Г. БЛИНКОВА
БНТУ (г. Минск, Беларусь)

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ В МОДИФИЦИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Нелинейная динамическая упругопластическая модель для описания локализации деформаций находит широкое применение при изучении композиционных материалов, используемых в строительстве. Особенность этой модели заключается в том, что в ней текучесть материала зависит не только от приложенного напряжения и деформации, но и от градиента деформации второго порядка [1, 2]. В (1+1)-мерном случае для задачи о динамическом нагружении стержня на этапе деформационного разрушения, соответствующем нисходящей ветви диаграммы материала, уравнение движения для флуктуаций деформации ε' относительно однородного напряженного состояния можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial^2 \varepsilon'}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^4 \varepsilon'}{\partial x^4} = \frac{1}{2} f \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varepsilon'), \quad (1)$$

где постоянные κ , δ и f – параметры модели.

Если степень возбуждения системы велика, то это уравнение является существенно нелинейным и может иметь решения в виде солитонов или солитоноподобных объектов [2, 3]. В то же время представляет интерес исследование решения уравнения (1) и в случае, когда влияние нелинейного члена достаточно мало так, чтобы можно было применить теорию возмущений (коэффициент f мал по сравнению с другими коэффициентами). Соответствующее линеаризованное уравнение получается при $f = 0$.

Решение задачи будем искать в виде стационарных волн вида $\varepsilon' = u(z) = u(x - vt)$, где v – скорость распространения волны. Решение линеаризованного уравнения известно:

$$u_0(z) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa + v^2}{\delta^2}} z\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa + v^2}{\delta^2}} z\right), \quad (2)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Запишем решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\delta^2 \frac{d^4 u}{dz^4} + (\kappa + v^2) \frac{d^2 u}{dz^2} = f \left[u \frac{d^2 u}{dz^2} + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right], \quad (3)$$

которое получается из уравнения (1) в случае стационарных волн, в виде ряда по малому параметру f :

$$u(z) = u_0(z) + f u_1(z) + f^2 u_2(z) + \dots, \quad (4)$$

где $u_i(z)$, $i = 1, 2, 3, \dots$ – неизвестные функции, которые предстоит найти. Подставив (4) в (1), получим бесконечную систему линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, решая которую, можно в принципе определить все функции u_i .

При построении решения с помощью теории возмущений наиболее существенна поправка первого порядка по малому параметру. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\delta^2 \frac{d^4 u_1}{dz^4} + (\kappa + v^2) \frac{d^2 u_1}{dz^2} = u_0 \frac{d^2 u_0}{dz^2} + \left(\frac{du_0}{dz} \right)^2. \quad (5)$$

Здесь u_0 – решение, определяемое соотношением (2). Общее решение неоднородного уравнения (5) определяется общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (5), и частным решением этого уравнения.

Окончательно с точностью до членов первого порядка по f решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$\varepsilon'(x, t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa + v^2}{\delta^2}} (x - vt)\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa + v^2}{\delta^2}} (x - vt)\right) +$$

$$f \left[A_1 \cos \left(\sqrt{\frac{\kappa+v^2}{\delta^2}} (x - vt) \right) + A_2 \sin \left(\sqrt{\frac{\kappa+v^2}{\delta^2}} (x - vt) \right) \right] +$$

$$f \left[\frac{c_1^2 - c_2^2}{6} \cos \left(4 \sqrt{\frac{\kappa+v^2}{\delta^2}} (x - vt) \right) + \frac{c_1 c_2}{3} \sin \left(4 \sqrt{\frac{\kappa+v^2}{\delta^2}} (x - vt) \right) - \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \right].$$

Здесь A_1 и A_2 – константы интегрирования.

Полученное решение, как и решение линейного уравнения, является осциллирующим, но по сравнению с линейным приближением носит более сложный характер. Теперь уже дополнительно появляются гармонические составляющие четвертого порядка. Можно заключить, что в основных чертах механизм протекания пластической деформации при учете малой нелинейности существенно не изменился, хотя ясно, что появилось дополнительное взаимодействие между ячейками материала. Отсутствие второй и третьей гармонических составляющих указывает на то, что волны с соответствующими частотами не участвуют в процессе переноса энергии при формировании и распространении деформаций. Фактически, имеет место подавление волновых свойств рассматриваемой нелинейной упругопластической модели в результате учета нелинейности. Однако, поскольку нелинейность мала, то не все гармонические составляющие исчезают. Следовательно, в случае, когда коэффициент f мал, волновые свойства модели преобладают над влиянием нелинейности.

Исследование сходимости ряда теории возмущений является достаточно сложной задачей, однако в рассматриваемом случае можно говорить о том, что ряд (4) сходится, по крайней мере, асимптотически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кукуджанов, В.Н. Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и её применение к исследованию локализации деформаций / В.Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1999. – № 5. – С. 72–78.
2. Мягков, Н.Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне / Н.Н. Мягков // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25, вып. 20. – С. 48–53.
3. Князев, М.А. Солитоны в нелинейной упругопластической модели / М.А. Князев. – Минск: БНТУ, 2013. – 221 с.

Е. В. КОМРАКОВА

ГГТУ им. П.О. Сухого (г. Гомель, Беларусь)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА НЕЁ

В последнее время в ряде отраслей техники большое внимание уделяется применению таких элементов конструкций, как трехслойные пластины. В них используются материалы с существенно различающимися термомеханическими характеристиками, что позволяет получать в рамках конструкции новые полезные свойства, недостижимые при использовании однородных элементов. Внешние несущие слои обеспечивают необходимые значения деформации, а внутренний слой, перераспределяя усилия между несущими слоями, может также выполнять и ряд других функций. Например, тепло- и звукоизоляцию, демпфирование и снижение вибраций и т. п.

Расчеты на жесткость подобных конструкций обязательно необходимо проводить с учетом их слоистой структуры. В противном случае можно получить результаты, значительно отличающиеся от реальных. Одним из эффективных методов исследования жесткости трехслойных конструкций, позволяющих учесть все особенности их поведения, является компьютерное моделирование посредством построения и исследования соответствующих математических моделей.

При этом предполагалось, что материал слоя может быть описан как упругое и линейно деформируемое вещество, так и нелинейно-деформируемое вещество. Зависимость между напряжением и деформацией в точке для нелинейно-упругого тела в напряженном состоянии, используя понятия интенсивности напряжения и интенсивности деформации, можно представить в виде [1]:

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i, \quad (1)$$

где E' – секущий модуль деформации первого рода, зависящий от степени деформации, т. е. $E' = f(\varepsilon)$;

σ_i – интенсивность напряжений;

ε_i – интенсивность деформаций.

Для численного решения полученной математической модели использовался метод МКЭ [2], [3].

После построения матрицы жесткости всей конструкции $[K]$, составляется система линейных уравнений.

$$\{R\} = [K]\{g\}, \quad (2)$$

где $\{R\}$ и $\{g\}$ – векторы узловых сил и перемещений всей системы.

В своем первоначальном виде система (2) решения не имеет, т. к. матрица жесткости $[K]$ сингулярная – ее определитель равен 0 [2]. Учет граничных условий в (2) приводит к изменению матрицы жесткости $[K]$ и векторов $\{R\}$ и $\{g\}$. Измененная матрица $[K^*]$ уже не будет сингулярной и система (2) будет иметь решение.

Проводилось исследование величины прогиба защемленной по контуру трехслойной круглой пластинки радиуса $r=1.5$ м под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности 6 МПа [3]. Внешние слои имеют толщину 4 см и выполнены из алюминиевого сплава Д16Т, а внутренний слой представляет собой слой из тефлона толщиной 0,2 м. Физические характеристики материалов приведены в [3]. Полученные результаты показаны на рисунке.

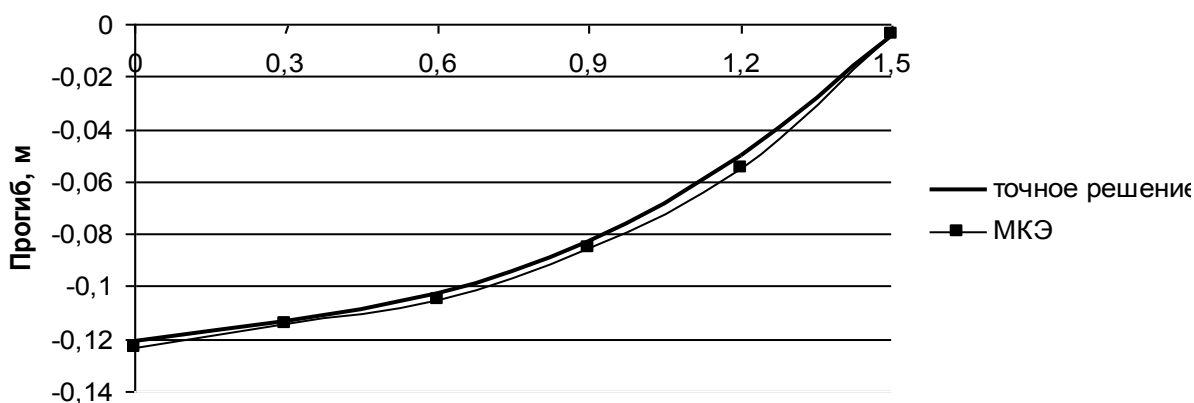


Рисунок – Прогиб трехслойной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки

Решение с помощью разработанной программы сравнивалось с решением из [3], для дискретизации использовались осесимметричные конечные элементы. Максимальная погрешность решений не превышала 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Быховцев, В.Е. Компьютерное моделирование систем нелинейной механики грунтов / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, В.В. Бондарева. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2002. – 215 с.
3. Андреев, А.Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.

А. П. КОНДРАТЮК, А. А. МШАР

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

В системах разной природы встречаются сверхбыстрые процессы, в которых исследуемая величина за некоторый промежуток времени возрастает на несколько порядков. Математически такие явления могут быть описаны с помощью дифференциальных уравнений, допускающих решения, растущие в режиме с обострением. Это решения, которые за конечный момент времени (момент обострения) обращаются в бесконечность [1].

В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_{кр}\}$ рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u^2, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \sin x. \quad (3)$$

Для решения данной задачи будем использовать неявную разностную схему. В прямоугольнике \bar{Q}_T введем равномерную сетку

$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}, hN = l\} = \omega_h \cup \{x_0 = 0; x_N = l\}$,
 $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_0}, \tau N_0 = T_{kp}\} = \omega_\tau \cup \{t_{N_0} = T_{kp}\}$ – с постоянными шагами h и τ соответственно по пространственной и временной переменным. Ниже будут использованы обычные обозначения теории разностных схем [2].

На введенной сетке $\bar{\omega}$ дифференциальную задачу (1)–(3) заменим разностной:

$$y_t + Ay = \lambda y^2, \quad a = 0,5(k_{i-1} + k_i), \quad (4)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad \hat{y}_0 = 0, \quad \hat{y}_N = 0, \quad (5)$$

$$Ay = -(ay_{\bar{x}})_x. \quad (6)$$

Получение разностного решения сводится к решению соответствующей системы нелинейных уравнений. Полученная система нелинейных уравнений решается следующим методом:

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n :

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор x_n :

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \mathcal{E}$, где \mathcal{E} – малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина: если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right),$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n (\|f(x_n)\| + \|f(x_{n+1})\|) \|f(x_n)\|}{2\|f(x_{n+1})\|^2}; \quad \gamma_0 = \beta_0^2$$

и осуществляется переход на шаг 1 [3].

Вычислительный эксперимент. В прямоугольнике \bar{Q}_T с $l = \pi$ рассмотрим начально-краевую задачу (1)–(3).

Результаты вычислений согласовываются с тем, что при $\lambda = 0,7$ происходит "затухание" решения, а при сравнительно небольших изменениях λ возникает неограниченный рост решения за конечное время [4]. На рисунке 1 изображен график затухающего решения в последовательные моменты времени. При $\lambda = 1,18$ полученное разностное решение задачи обращается в бесконечность за конечный момент времени (рисунок 2).

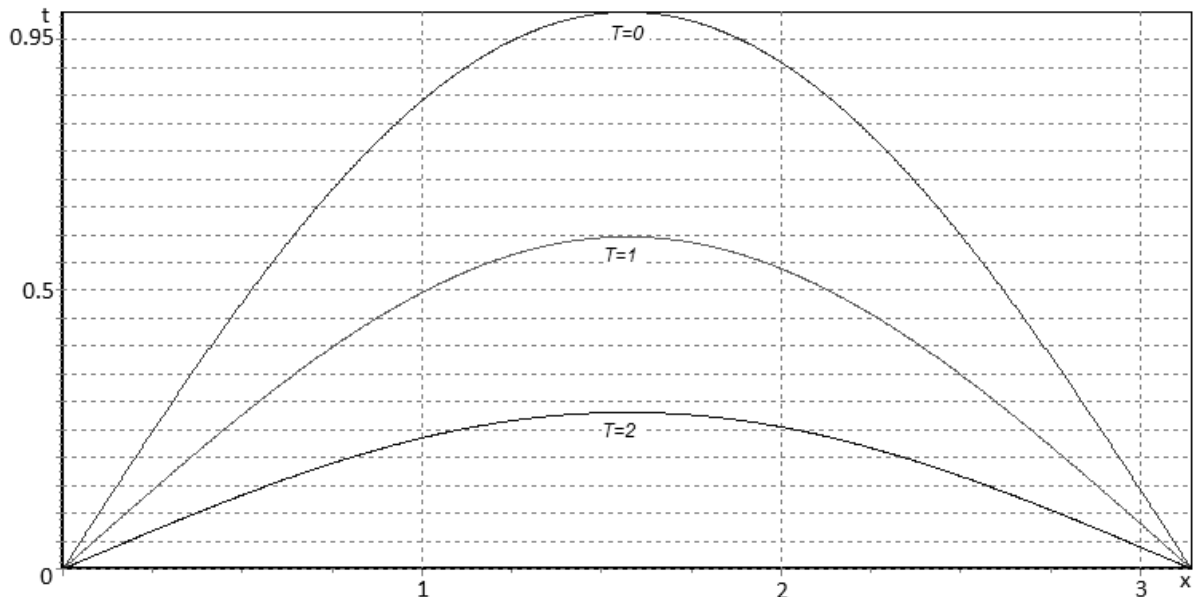


Рисунок 1

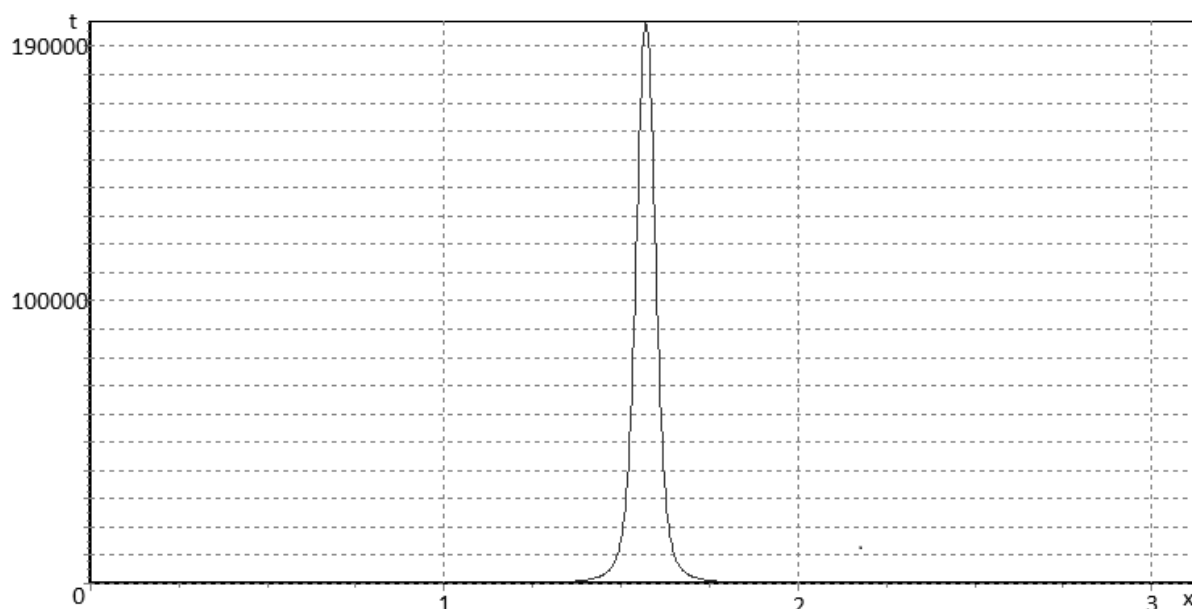


Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.А. Самарский [и др.]. – М.: Наука, 1987. – 481 с.
2. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 616 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.
4. Matus, P. Well-posedness and blow up for IBVP for semi-linear parabolic equations and numerical methods / P. Matus, S. Lemeshevsky, A. Kandratiuk // Comp. Meth. Appl. Math. – 2010. – № 10. – С. 1–27.
5. Самарский, А.А. Разностные схемы с операторными множителями / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус. – Минск: Институт мат. моделирования РАН, 1998. – 442 с.

Н. С. КОСЕНОК

БТЭУ ПК (г. Гомель, Беларусь)

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАНЫМИ СУБНОРМАЛЬНО ПРИМИТИВНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В данном сообщении G – конечная группа.

Напомним, что собственная подгруппа H группы G называется примитивной подгруппой в G , если пересечение всех тех подгрупп из G , которые содержат H собственным образом, снова отлично от H [1]. По аналогии с этим мы говорим, что H – субнормально примитивная подгруппа в G , если H – собственная субнормальная подгруппа в G и пересечение всех тех субнормальных подгрупп из G , которые содержат H собственным образом, отлично от H .

Целью данного сообщения является изучение строения групп, в которых субнормально примитивные подгруппы обладают заданными добавлениями. В частности, нами доказана.

Теорема. *Если каждая субнормально примитивная подгруппа неединичной группы G либо имеет примарный индекс в G , либо обладает холловским нильпотентным добавлением в G , то G сверхразрешима.*

Следствие. *Если каждая субнормально примитивная подгруппа неединичной группы G имеет примарный индекс в G , то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson // Canad. J. Math. – 1971. – Vol. 23, N 3. – P. 562–564.

Г. В. КУЛАК, Г. В. КРОХ, Т. В. НИКОЛАЕНКО
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

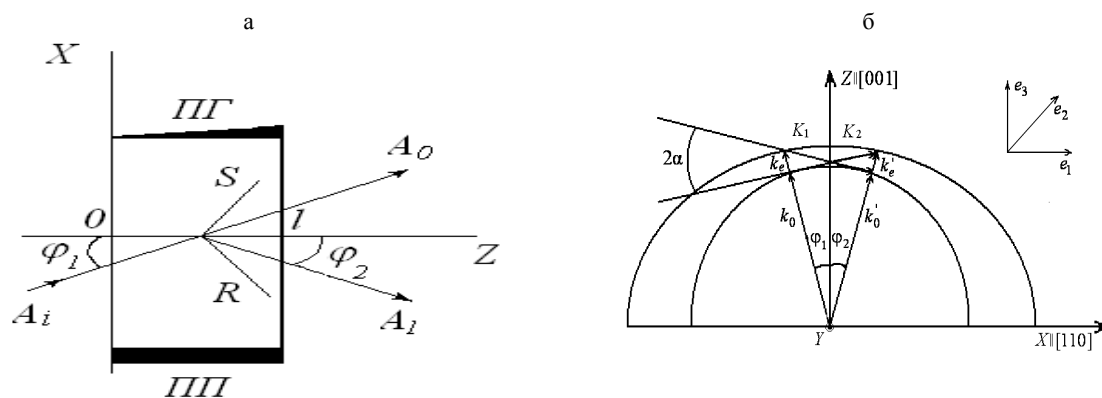
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЬ-СУПЕРГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ АКУСТООПТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Исследованы особенности преобразований формы бesselь-супергауссовых световых пучков при брэгговской дифракции на ультразвуковых волнах в одноосных гиротропных кристаллах. Показано, что при дифракции световых пучков, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла на медленной сдвиговой ультразвуковой волне в условиях сильного акустооптического взаимодействия дифрагированные световые пучки нулевого порядка имеют форму, существенно отличающуюся от формы падающих пучков; дифрагированные пучки первого порядка испытывают менее существенные изменения формы. Установлено, что эффективность дифракции слабо зависит от ширины супергауссовой составляющей бesselь-супергауссового пучка.

Для целей оптимизации акустооптических (АО) устройств (модуляторов, дефлекторов, процессоров) необходимо знать влияние поляризации и амплитудного распределения световых пучков на характеристики дифрагированного света [1]. К настоящему времени хорошо изучена дифракция гауссовых световых пучков на ультразвуке [1–4]. При этом в работах [1, 2] применен спектральный метод для расчета дифрагированных световых пучков, а в [3, 4] метод Римана для расчета дифракции ограниченных световых пучков. В работе [3] исследовано влияние затухания ультразвука на поляризационные и энергетические характеристики световых пучков, в [4] влияние оптической гиротропии. В работе [5] с использованием двумерной теории связанных волн предложено теоретическое обоснование особенностей пространственно – углового преобразования ограниченных гауссовых световых пучков на частотно – модулированных акустических сигналах. Показано [6], что в кристаллах парателлурита возможна поляризационно-независимая модуляция бesselевых световых пучков, то есть эффективность брэгговской дифракции не зависит от состояния поляризации падающего пучка. На практике формируют приближенно бesselевы пучки, ограничивая их диаметр [7]. Квазибездифракционные световые пучки находят широкое применение в области нелинейной кристаллоптики (см. [8]). К настоящему времени с использованием БСП реализовано большинство известных нелинейно-оптических взаимодействий, ранее изученных для пучков гауссова типа (самовоздействие, генерация гармоник, параметрическое преобразование частоты и др.).

В настоящей работе с использованием двумерной теории связанных волн рассмотрена брэгговская АО дифракция бesselь-супергауссовых световых пучков (БСП), распространяющихся вблизи оптической оси одноосного гиротропного кристалла, на бегущей ультразвуковой (УЗ) волне. Предложено теоретическое обоснование преобразования формы БСП, дифрагированных на ультразвуке.

Предположим, что область, занятая ультразвуком, занимает пространство между плоскостями $z=0$ и $z=l$. Световой пучок с некоторым распределением амплитуды распространяется в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту УЗ волны и дифрагирует под углом φ_2 . Геометрия АО взаимодействия и схема расположения волновых векторов света ($k_{o,e}$, $k'_{o,e}$) и ультразвука ($K_{1,2}$) представлена на рисунке 1.



(ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель) (а); схема расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент БСП в плоскости дифракции кристалла TeO_2 ($K_{1,2}$ – волновые векторы ультразвука, $k_{o,e}$,

$k'_{o,e}$ – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн,

2α – угол между акустическими векторами K_1 и K_2) (б)

Рисунок 1 – Геометрия анизотропной акустооптической дифракции ограниченных световых пучков

Плоская УЗ волна имеет вектор смещения вида [1]:

$$U = U_0 \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad (1)$$

где $\Omega = 2\pi f$ – центральная частота УЗ источника;
 U_0 – амплитуда УЗ волны;

$K = \Omega / v$, (v – фазовая скорость УЗ волны).

УЗ волна создает периодическое в пространстве и времени изменение тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij}$, связанное с тензором упругих деформаций $U_{ik} = (\nabla_k U_i + \nabla_i U_k) / 2$ и тензором фотоупругих постоянных P_{ijkl} .

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности светового поля в области, занятой ультразвуком [1, 3]. Решение волнового уравнения ищем в виде суммы двух связанных волн с медленно изменяющимися амплитудами:

$$E = e_{\tau 0} A_0(x, z) e^{i[k_0 r - \omega t]} + e_{\tau 1} A_1(x, z) e^{i[k_1 r - \omega_1 t]}, \quad (2)$$

где $e_{\tau 0,1}$ – единичные векторы эллиптической поляризации дифрагированных волн;

$\Omega_1 = \omega \pm \Omega$, где ω – частота световой волны;

$k_{0x} = (\omega / c) n_0 \sin \varphi_1$, $k_{0z} = (\omega / c) n_0 \cos \varphi_1$, $k_{1x} = [(\omega \pm \Omega) / \tilde{n}] n_1 \sin \varphi_2$,

$k_{1z} = [(\omega \pm \Omega) / c] n_1 \cos \varphi_2$ – волновые векторы падающей и дифрагированной волны;

c – скорость света в вакууме;

$n_0 = \sqrt{\varepsilon_{ij} \tilde{k}_{0i} \tilde{k}_{0j}}$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{ij} \tilde{k}_{1i} \tilde{k}_{1j}}$, где \tilde{k}_0 (\tilde{k}_1) – единичные векторы в направлении распространения дифрагированной волны нулевого (первого) порядка.

Подставив выражение (2) в волновое уравнение для напряженности светового поля E получим систему уравнений связанных волн:

$$\frac{\partial A_0}{\partial s} + i\gamma_0 A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} + i\gamma_1 A_0 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты связи мод выражаются через свертки тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij}$ с векторами

поляризации $\gamma_{0,1} = k(e_{\tau 0,1}^* \Delta \hat{\varepsilon}^* e_{\tau 1,0}) / 4\sqrt{n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)}$, причем $k = 2\pi / \lambda_0$ (знак «*» означает комплексное сопряжение, λ_0 – длина световой волны в вакууме); $s = z \sin \varphi_2 - x \cos \varphi_2$, $r = z \sin \varphi_1 + x \cos \varphi_1$;

n_o (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатели преломления кристалла.

При таком подходе из-за малой длины АО взаимодействия не учитывается изменение фазового волнового фронта светового пучка.

Предполагается, что падающий световой пучок имеет бessel-супергауссово амплитудное распределение [7]: $A(r) = A_{0n} \exp[-(r^{2n} / 2w^{2n})] J_0(kr)$, где $J_0(x)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, γ – параметр конусности светового пучка, w – полуширина супергауссовой составляющей пучка, n – параметр супергауссовости.

Постоянная амплитуда A_{0n} находится из условия нормировки: $A_{0n} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^{2n} / w^{2n}) J_0^2(kr) dr \right]^{-1/2}$.

Если искать решение системы уравнений (3) методом Римана [3–5] с использованием граничных условий: $A_0(z=0) = A$, $A_1(z=0) = 0$, то общее решение для дифрагированных волн нулевого $A_0(r)$ и первого $A_1(s)$ порядка можно представить в виде:

$$A_0(r) = A(r) - 0,5v \int_{-1}^{+1} A[r - l(1 - \xi) \sin \varphi_1] \frac{J_1[v\sqrt{1 - \xi^2}]}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (4)$$

$$A_1(s) = i0,5 \int_{-1}^{+1} A[l(1 - \xi) \sin \varphi_2 - s] J_0[v\sqrt{1 - \xi^2}] d\xi, \quad (5)$$

где v – коэффициент АО модуляции на монохроматической УЗ волне частотой Ω ,

l – длина АО взаимодействия,

$J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода, первого порядка.

Величина ν определяется сверткой тензора приращений диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$ с единичными векторами эллиптической поляризации $e_{\tau 0,1} = (e_{p,2} + i\tau_{o,e}e_{2,p})/\sqrt{1+\tau_{o,e}^2}$ (e_p – единичный вектор, перпендикулярный направлению распространения дифрагированной волны и лежащий в плоскости дифракции; e_2 – единичный вектор, перпендикулярный плоскости дифракции; $\tau_{o,e}$ – эллиптичности дифрагированных волн), то есть $\nu \sim (e_{\tau 0}^* \Delta\hat{\varepsilon} e_{\tau 1})$ [6].

Расчеты проводились для анизотропной АО дифракции световых волн, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла парателлуриата (TeO_2), обладающего гиротропией, на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [110] и поляризованной вдоль оси [110]. В результате выполнения свертки тензора $\Delta\hat{\varepsilon}$ с вектором поляризации получаем коэффициент АО модуляции световой волны

$$\nu_{oe} = \Delta \left\{ \tau_o \tau_e \cos(\alpha - \varphi_2) - \cos(\alpha - \varphi_1) \right\} \Delta_1 + \left\{ \sin(\alpha + \varphi_1) - \tau_o \tau_e \sin(\alpha - \varphi_2) \right\} \Delta_2, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{oe} &= \left[(1 + \tau_o^2)(1 + \tau_e^2) \right]^{1/2}, \\ \Delta_1 &= [n_e^4(p_{11} - p_{12}) + n_o^2 n_e^2 p_{44} \sin(2\alpha) / 8] / \tau_{oe}, \\ \Delta_2 &= [n_e^4 \sin(2\alpha)(p_{12} - p_{11}) + n_o^2 n_e^2 p_{44} / 2] / \tau_{oe}, \\ \Delta &= \pi U_{12} l / \{ 2\lambda_0 [n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)]^{1/2} \}, \end{aligned}$$

причем $U_{12} = [2I_a / \rho v^3]^{1/2}$ (I_a – интенсивность УЗ волны, v – фазовая скорость УЗ волны, ρ – плотность кристалла; p_{11}, p_{12}, p_{44} – фотоупругие постоянные). В случае e - o преобразования световых пучков в формулах (4)–(6) следует выполнить замену: $\alpha \rightarrow -\alpha, o \leftrightarrow e$.

Разлагая, выражения (4), (5) в степенной ряд (до первой степени) по малым геометрическим параметрам: $g_1 = l \sin(\varphi_{1,2}) / w$ [9], $g_2 = k \gamma l \sin \varphi_{1,2}$ ($\varphi_1 \approx \varphi_2$), получим:

$$A_0(r') = A(r') \cos(\nu) - 0,5 A_{0n} \mathcal{V}_1 \left[n g_1 r'^{2n-1} \exp(-0,5 r'^{2n}) J_0(r'') + g_2 J_1(r'') \exp(-0,5 r'^{2n}) \right] + 0,5 A_{0n} \mathcal{V}_3 \left[n g_1 r'^{2n-1} \exp(-0,5 r'^{2n}) J_0(r'') - 0,5 A_{0n} v g_2 J_1(r'') \exp(-0,5 r'^{2n}) \right], \quad (7)$$

$$A_1(s') = A(s') \sin(\nu) + 0,5 A_{0n} \mathcal{V}_2 \left[n g_1 s'^{2n-1} \exp(-0,5 s'^{2n}) J_0(s'') + g_2 J_1(s'') \exp(-0,5 s'^{2n}) \right] - 0,5 A_{0n} \mathcal{V}_4 \left[n g_1 s'^{2n-1} \exp(-0,5 s'^{2n}) J_0(s'') + 0,5 A_{0n} v g_2 J_1(s'') \exp(-0,5 s'^{2n}) \right], \quad (8)$$

где $r'' = r/w, s'' = s/w, r''' = k \gamma r, s''' = k \gamma s, I_1 = (4/\nu) \sin^2(\nu/2), I_2 = \sin(\nu)/\nu, I_3 = 2[J_0(\nu) - 1]/\nu, I_4 = -2J_1(\nu)/\nu$.

С учетом выражений (7), (8) интенсивности супергауссовых дифрагированных световых пучков равны ($g_2=0, \gamma=0$):

$$I_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_0(r)|^2 dr = \cos^2 \nu - n v g_1 A_{0n} \cos \nu \int_{-\infty}^{+\infty} r'^{2n-1} \exp(-r'^{2n}/2) dr, \quad (9)$$

$$I_{n1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_1(s)|^2 ds = \sin^2 \nu + n v g_1 A_{0n} \sin \nu \int_{-\infty}^{+\infty} s'^{2n-1} \exp(-s'^{2n}/2) ds. \quad (10)$$

Для гауссовых световых пучков ($n=1$): $I_{n0} = \cos^2 \nu, I_{n1} = \sin^2 \nu$.

Интенсивности бesselевых дифрагированных световых пучков радиусом R_n даются соотношениями ($g_1=0, w \rightarrow \infty$):

$$I_{n0} = \int_0^{R_n} |A_0(r)|^2 dr = \cos^2 \nu - g_2 A_{0n} \left[1 - J_0^2(R_n) \right] \left[1 - J_0(\nu) + \sin^2(\nu/2) \right], \quad (11),$$

$$I_{n1} = \int_0^{R_n} |A_1(s)|^2 ds = \sin^2 \nu - g_2 A_{0n} \left[1 - J_0^2(R_n) \right] \left[J_1(\nu) + 0,5 \sin \nu \right]. \quad (12).$$

Эффективности $o-e$ ($e-o$) преобразования собственных эллиптически поляризованных БСГП, находим из соотношений:

$$\eta_{oe(eo)} = \frac{I_{n1}(v_{oe(eo)})}{I_{n0}(v_{oe(eo)}) + I_{n1}(v_{oe(eo)})}. \quad (13)$$

Из выражений (7), (8) следует, что при АО дифракции имеет место изменение формы БСГП при увеличении параметра конусности бesselевой составляющей пучка, ширины супергауссовой составляющей пучка, интенсивности ультразвука, а также геометрических параметров пучков g_1 и g_2 . Как следует из выражений (9)–(13) при учете геометрических параметров дифрагированных бesselевых и супергауссовых пучков имеет место изменение модуляционных зависимостей дифрагированных пучков по сравнению с плосковолновым приближением [1]. Для гауссовых световых пучков при учете лишь первого приближения по малому параметру g_1 форма модуляционной зависимости совпадает с имеющей место в плосковолновом приближении.

Численные расчеты на основании выражений (7), (8), (13) проводились для АО дифракции БСГП с длиной волны $\lambda_0 = 0,63$ мкм, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла TeO_2 , на медленной сдвиговой УЗ волне с фазовой скоростью $v = 617$ м/с.

На рисунке 2 представлена зависимость амплитуды дифрагированного светового пучка нулевого (A_0) и первого (A_1) порядка от поперечной координаты r и s соответственно.

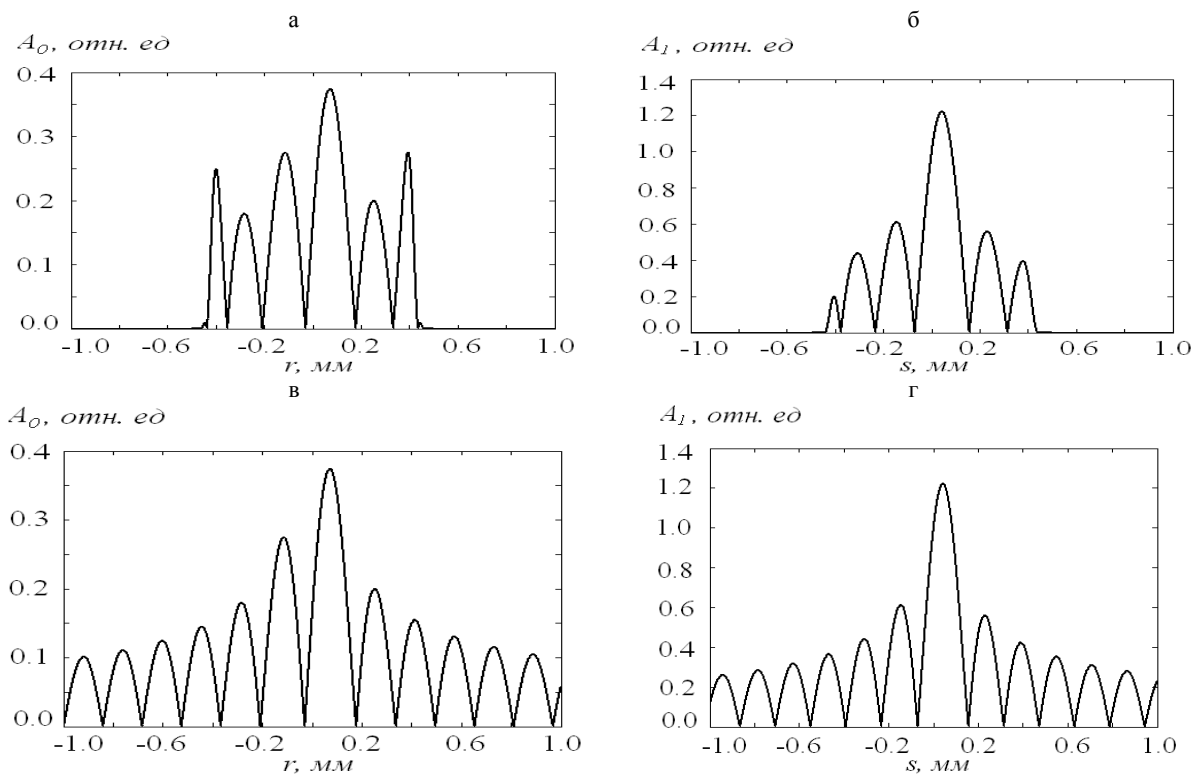


Рисунок 2 – Поперечное распределение амплитуды дифрагированного светового пучка нулевого A_0

и первого A_1 порядка для падающего БСГП с $w=0,2$ мм (а, б) и $w=2$ мм (в, г) ($n=10, l=5$ мм, $n_o = 2,21; n_e = 2,35; \gamma=2$ мрад, $\alpha = 8^\circ, f = 30$ МГц, $p_{11} = 0,0074; p_{12}=0,187; p_{44}=-0,17; \rho = 5,72$ кг/см³, $I_a=1$ Вт/см²)

Из рисунков 2 а, б следует, что для падающего БСГП, имеющего малую ширину w , дифрагированный пучок нулевого порядка существенно искажается. При этом несимметричная форма пучка обусловлена дифракционным процессом, когда боковые максимумы падающего БСГП достигают значительных интенсивностей. В этом случае при достаточно высокой интенсивности ультразвука достигается преобразование энергии света в дифракционный первый порядок (и наоборот); дифрагированный пучок первого порядка испытывает преобразование, при котором боковые максимумы падающего пучка увеличиваются по сравнению с центральным максимумом. С увеличением ширины гауссовой составляющей (w) БСГП дифрагированные пучки испытывают менее существенные преобразования формы. Следует отметить, что дифрагированные пучки первого порядка претерпевают менее значительные амплитудные преобразования, чем нулевого. Расчеты показывают, что для

супергауссовых падающих световых пучков ($\gamma \rightarrow 0$) дифрагированные световые пучки нулевого и первого порядка имеют супергауссов профиль. Преобразование формы БСГП на границе области АО взаимодействия может также трактоваться как эффект Гуса-Хэнхена продольного смещения световых пучков вдоль выходной грани области АО взаимодействия [3, 9].

Зависимость эффективности дифракции η от интенсивности ультразвука для нулевого и первого дифракционного порядка представлена на рисунке 3.

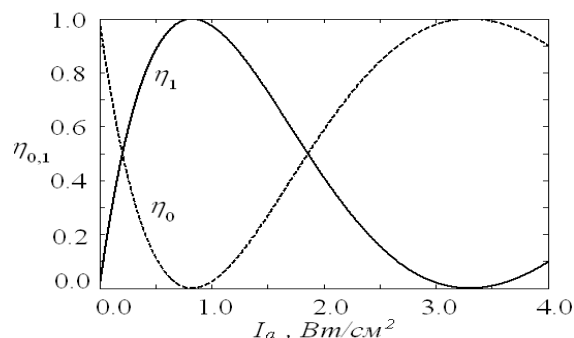


Рисунок 3 – Зависимость эффективности дифракции $\eta_{0,1}$ падающего бessel-супергауссового светового пучка с $w=0,2 \pm 2$ мм от интенсивности ультразвука I_a для нулевого (η_0) и первого (η_1) порядка дифракции ($n=10$, $l=5$ мм, $n_0 = 2,21$; $n_e = 2,35$; $\gamma=2$ мрад, $\alpha = 8^0$, $f = 30$ МГц, $p_{11}=0,0074$; $p_{12}=0,187$; $p_{44}=-0,17$; $\rho = 5,72$ кг/см³)

Из рисунка следует, что при изменении ширины гауссовой составляющей БСГП эффективность дифракции в нулевом и первом дифракционном порядке практически не изменяется и достигает максимального значения. Данная особенность дифракции объясняется тем, что каждая плосковолновая компонента, принадлежащая квазиконическому спектру падающего БСГП, рассеивается в соответствующую компоненту дифрагированного БСГП с эффективностью, близкой к ста процентам.

Таким образом, в работе развита двумерная теория дифракции БСГП на ультразвуке. Полученные результаты показывают, что в гиротропных кристаллах парателлуриита при дифракции БСГП имеет место преобразование их формы. Варьирование параметров, характеризующих АО взаимодействие позволяет добиваться условий оптимальной формы дифрагированных пучков при различных применениях. Такие АО устройства перспективны для применений в лазерных технологиях (в частности для лазерной резки и сварки), для зондирования поглощающих и рассеивающих сред на большую глубину, лазерной локации, микроскопии высокого разрешения и других областях, а также для решения проблем лазерной диагностики и контроля в промышленности, микро- и нанотехнологиях [6–8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакший, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М.: Радио и связь, 1985. – 279 с.
2. Балакший, В.Н. Акустооптическое взаимодействие ограниченных волновых пучков / В.Н. Балакший, Ч.А. Упасен // Вестник МГУ. Сер. физ.-мат. наук. – 1982. – Т. 23, вып. 5. – С. 71–76.
3. Белый, В.Н. Дифракция световых пучков на затухающих ультразвуковых волнах в оптически изотропных средах / В.Н. Белый, И.Г. Войтенко, Г.В. Кулак Г.В // ЖПС. – 1992. – Т. 56, вып. 5–6. – С. 831–836.
4. Шарангович, С.Н. Дифракция световых пучков на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах / С.Н. Шарангович // Автометрия. – 1994. – № 1. – С. 31–39.
5. Анисимова, А.Е. Преобразование световых пучков при брэгговской дифракции на частотно-модулированной ультразвуковой волне / А.Е. Анисимова, Г.В. Кулак, П.И. Ропот // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2012. – № 2. – С. 93–96.
6. Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бesselевых световых пучков / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Г.В. Крох, О.В. Шакин // Журн. прикл. спектр. – 2014. – Т. 81, № 1. – С. 75–80.
7. Zhi-Ping Jiang Supper-Gaussian-Bessel beam / Zhi-Ping Jiang // Opt. Commun. – 1996. – Vol. 125. – P. 207–210.
8. Генерация второй гармоники бesselевыми световыми пучками в кристаллах КТП / В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.В. Кондратюк, Н.А. Хило, А.А. Шагов // Квант. электрон. – 1998. – Т. 25, № 11. – С. 1037–1042.
9. Moharam, M.G. Bragg diffraction of finite beams by thick grating / M.G. Moharam, T.K. Goylord, R. Magnusson // J. Opt. Soc. Am. – 1980. – Vol. 70, № 3. – P. 300–304.

В. М. МАДОРСКИЙ, Н. В. БАНДЕРА, Ю. В. МИСАК
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

**ОБ УСТОЙЧИВЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ ПРОЦЕССАХ РЕШЕНИЯ
КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$u_t' = \frac{\partial}{\partial x} (K(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t, u). \quad (1)$$

Задача состоит в отыскании приближённого решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \mu(x); \\ u(0, t) = \mu_1(t); \\ u(l, t) = \mu_2(t); \end{cases} \quad (2)$$

$$x \in [0; l], t \in [0; T].$$

Рассмотрим сущность разностного метода для решения уравнения (1) при заданных условиях (2).

Решение задачи (1)–(2) сведём к вычислению приближённых значений сеточной функции $y(x_i, t_g)$ в

узловых точках $x_i = ih, t_g = g\tau$, где $h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{M}, i = \overline{0; N}, g = \overline{0; M}$. Рассмотрим модельную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^2 + t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2(u^2 + t^2) + (2x + t)^2 2u - x, \quad (3)$$

для которой известно решение $u(x, t) = x^2 + tx$.

Заменим производные их разностными аппроксимациями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y_k^{m+1} - y_k^m}{\tau} + O(\tau); \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y_{k+1}^{m+1} - 2y_k^{m+1} + y_{k-1}^{m+1}}{h^2} + O(h^2); \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y_{k+1}^{m+1} - y_{k-1}^{m+1}}{2h} + O(h^2); k = \overline{0; N}.$$

Итак, решение задачи (3) может быть сведено к решению системы:

$$\begin{aligned} \frac{y_k^{m+1} - y_k^m}{\tau} = & (1 - \sigma) \left((y_k^2 + t^2) \frac{y_{k+1}^{m+1} - 2y_k^{m+1} + y_{k-1}^{m+1}}{h^2} + 2y_k \left(\frac{y_{k+1}^{m+1} - y_{k-1}^{m+1}}{2h} \right)^2 - f(x, t + \tau, y_k) \right) + \\ & + \sigma \left((y_k^2 + t^2) \frac{y_{k+1}^m - 2y_k^m + y_{k-1}^m}{h^2} + 2y_k \left(\frac{y_{k+1}^m - y_{k-1}^m}{2h} \right)^2 - f(x, t, y_k) \right); k = \overline{0; N}. \end{aligned} \quad (5)$$

При $\sigma = 0$ получим абсолютно устойчивую чисто неявную схему, а при $\sigma = 0.5$ имеем схему Кранка–Николсон.

Данную систему решаем с помощью нерегуляризованных, частично регуляризованных или регуляризованных нелокальных итерационных процессов, предложенных В.М. Мадорским [1]. Для сравнения рассмотрим также классический метод Пузынина [2].

Контроль погрешности будем производить по следующему правилу: сравниваем значения в узлах на соответствующих слоях, полученные с шагом τ и $\frac{\tau}{2}$; если они находятся в пределах заданной нормы погрешности,

то не изменяем шаг и переходим к следующему слою; иначе делим шаг до тех пор, пока не получим удовлетворяющие нас значения; на следующем слое действуем в обратном порядке – если последний шаг, полученный на предыдущем слое, даёт значения, удовлетворяющие некоторому заданному дополнительному ограничению на невязку, то пробуем его увеличить и т. д. Данный подход с «пульсирующим» шагом обеспечивает наиболее разумный способ выбора τ .

Заметим, что методы, обеспечивающие прогноз-коррекцию, позволили отыскать решение задачи на каждом из слоев с точностью вплоть до девятого порядка с той оговоркой, что для решения задачи выбран алгоритм, не подразумевающий увеличение шага при достижении достаточной, заведомо установленной точности по правилу Рунге на каком-либо слое, а также установлен начальный шаг порядка $1e-8$.

В таких условиях решение задачи обладает высокой точностью, но временные затраты на просчёт велики: на процессоре с частотой 1600 MHz просчёты в области $(x, t) \in ([0; 1] \times [0; 1])$ с разбиением интервала по x на 20 отрезков заняли около двух часов.

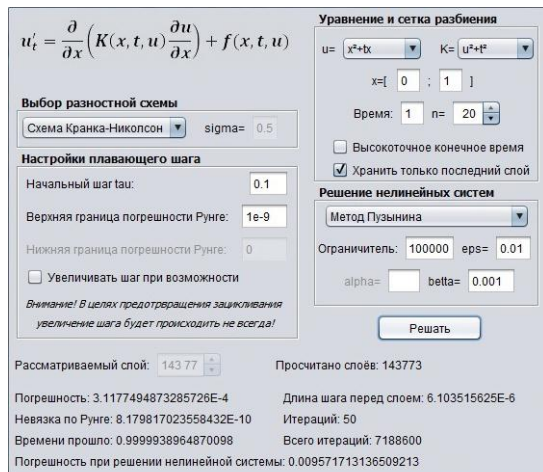
Обратим внимание, что решение задачи без значительных потерь в точности можно проводить и на временных интервалах большей длины.

Результаты работы приведены в таблице 1.

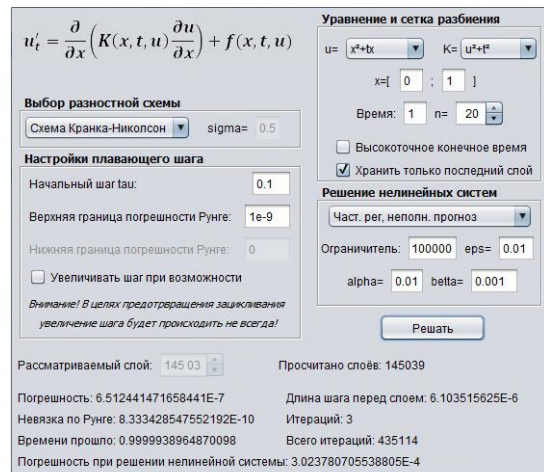
Таблица 1 – Эффективность решения задачи (3) в зависимости от выбора метода решения и точности, требуемой по принципу Рунге

Заданная точность по Рунге	Методы					
	Пузынина		Частично-регуляризованный, неполный прогноз		Частично-регуляризованный, полный прогноз	
	Неявная схема	Схема Кранка-Николсон	Неявная схема	Схема Кранка-Николсон	Неявная схема	Схема Кранка-Николсон
1E-5	3.4997E-4	3.7118E-4	6.7641E-5	8.5971E-5	6.7641E-5	8.5971E-5
1E-7	3.1683E-4	3.1541E-4	8.2967E-6	5.3701E-6	8.2967E-6	5.3701E-6
1E-9	3.1160E-4	3.1177E-4	4.9980E-7	6.5124E-7	4.9980E-7	6.5124E-7
1E-11	-	-	4.6912E-8	2.4295E-8	4.6912E-8	2.4295E-8

На основе таблицы и нижеследующих скриншотов можно сделать вывод о том, что квазиньютоновские методы полного и неполного прогноза [1] существенно эффективнее метода Пузынина [2] для слабоустойчивых систем типа (5).



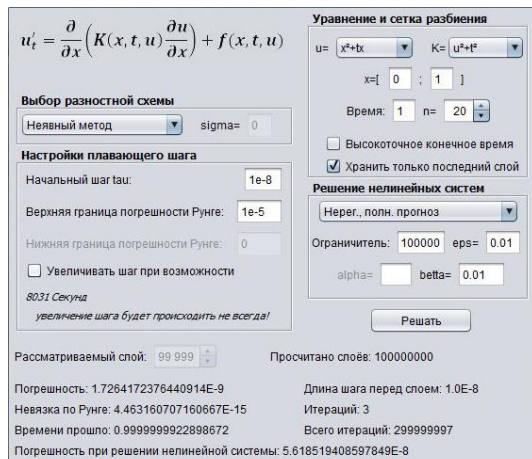
а



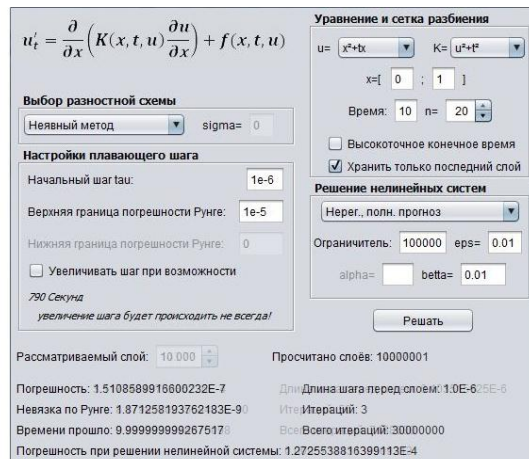
б

а) метод Пузынина; б) частично регуляризованный метод неполного прогноза

Рисунок 1 – Работа программы при точности по Рунге 1E-9



а



б

а) достигнутая точность – 1E-9; б) заданный промежуток времени [0;10]

Рисунок 2 – Нетривиальные случаи работы программы

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадорский, В.М. Квазинытоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174с.
 2. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 846–856.

В. М. МАДОРСКИЙ, Н. В. БАНДЕРА, Ю. В. МИСАК
 БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ РЯДА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассматривается квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$u'_t = \frac{\partial}{\partial x} (K(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t, u). \quad (1)$$

Задача состоит в отыскании приближённого решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \mu(x); \\ u(0, t) = \mu_1(t); \\ u(l, t) = \mu_2(t); \end{cases} \quad (2)$$

$$x \in [0; l], t \in [0; T].$$

Рассмотрим сущность разностного метода для решения уравнения (1) при заданных условиях (2).

Решение задачи (1)–(2) сведём к вычислению приближённых значений сеточной функции $u(x_i, t_g)$ в узловых точках $x_i = ih, t_g = g\tau$, где $h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{M}, i = \overline{0; N}, g = \overline{0; M}$.

Рассмотрим ряд модельных задач с заранее известными решениями $u_1(x, t) = x^2 + tx, u_2(x, t) = tx, u_3(x, t) = t \sin x$ и $K_i(x, t, u)$ равными соответственно $u^2 + t^2, u^3 + t, u + t$. Подставляя эти данные в уравнение общего вида (1), получаем следующие нелинейные задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^2 + t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2(u^2 + t^2) + (2x + t)^2 2u - x; \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u^3 + t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 3t^3 u - 1; \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (u + t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + t \sin x (u + t) + (t \cos x)^3 - \sin x. \quad (5)$$

Заменяя производные их трёхточечными разностными аппроксимациями, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{y_k^{m+1} - y_k}{\tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y_{k+1}^{m+1} - 2y_k^{m+1} + y_{k-1}^{m+1}}{h^2}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y_{k+1}^{m+1} - y_{k-1}^{m+1}}{2h}; k = \overline{0; N}. \quad (6)$$

Задачи (3)–(5) сводятся к системам нелинейных численных уравнений вида $f(x) = 0$, которые решаем с помощью нелокальных квазинытоновских итерационных процессов с частичной регуляризацией, реализующих процедуру полного и неполного прогнозов-коррекции:

Шаг 1. Решается линейное уравнение относительно Δx_n :

$$(\alpha \beta_n \|f(x_n)\| E + f'(x)) \Delta x_n = -f(x_n), n = 0, 1, 2, \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}], \alpha \ll 1. \quad (7)$$

Шаг 2. Вносится поправка в вектор X_n :

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, n = 0, 1, 2, \dots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}] \quad (8)$$

Шаг 3. Если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε – малая величина (параметр останова), то конец просчётов, иначе переход на шаг 4.

Шаг 4. Определяется новая шаговая длина и переход на шаг 1.

Выбор шаговой длины в исследуемых методах происходит по следующим формулам, соответствующим неполному и полному прогнозам:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1})\|}\right), \quad \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|}, \quad \beta_0 \in [10^{-2}; 0,5], \quad \gamma_0 = \beta_0^2;$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_n + \Delta x_n)\|}\right), \quad \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n \|f(x_n)\| \|f(x_{n+1} + \Delta x_{n+1})\|}{\|f(x_n + \Delta x_n)\| \|f(x_{n+2})\|},$$

$$\beta_0 \in [10^{-2}; 0,5], \quad \gamma_0 = \frac{\beta_0^2 \|f(x_0 + \Delta x_0)\|}{\|f(x_1)\|}.$$

Сходимость к решению рассмотренных выше методов доказана в [1]. Для сравнения также проведём исследование классического метода Пузынина [2].

Результаты численных экспериментов приведены в таблице 1:

Таблица 1 – Эффективность решения задач (3)–(5) в зависимости от выбора метода решения при заданной точности по Рунге, равной $1E-9$

Задача	Методы		
	Пузынина	Частично-регуляризованный, неполный прогноз	Частично-регуляризованный, полный прогноз
(3)	3.1160E-4	5.2114E-7	4.9980E-7
(4)	6.1690E-4	8.9476E-7	8.8251E-7
(5)	5.7191E-4	7.4362E-6	7.4363E-6

На основе таблицы и нижеследующих скриншотов можно сделать вывод о том, что квазиньютоновские методы полного и неполного прогноза, как нерегуляризованные, так и частично-регуляризованные существенно эффективнее метода Пузынина для задач вида (3)–(5).

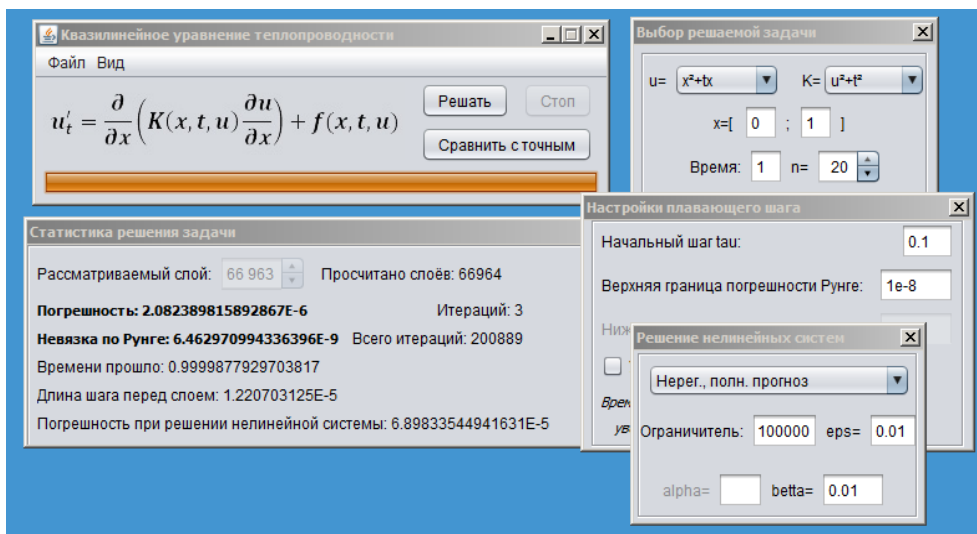


Рисунок 1 – Работа программы при решении задачи (3) и точности по Рунге $1E-8$ (нерегуляризованный метод, полный прогноз)

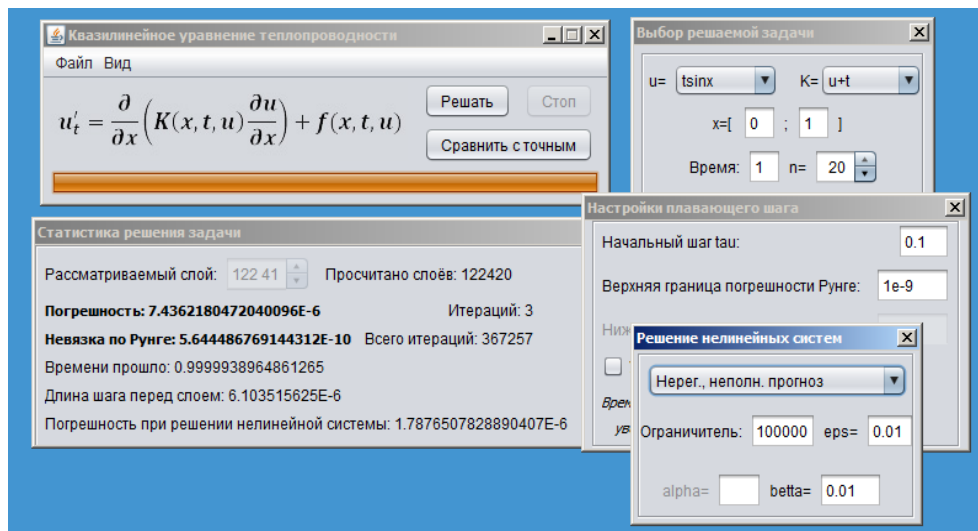


Рисунок 2 – Работа программы при решении задачи (5) и точности по Рунге 1E-8 (нерегуляризованный метод, неполный прогноз)

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.
2. Жанлав, Т. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. –Т. 32, № 6. – С. 846–856.

А. В. МАКАРЕВИЧ, О. В. ЗУБОК, В. В. ШЕПЕЛЕВИЧ
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ КРИСТАЛЛА ВТО

В недавно вышедших работах (см., например, [1, 2]) было сообщено о том, что в фоторефрактивном кристалле (ФРК) $\text{V}_{12}\text{TlO}_{20}$ (ВТО) наряду с фазовой голографической решеткой может существовать амплитудная решетка, формирование которой, как известно, обусловлено периодическими пространственными изменениями коэффициента поглощения кристалла под действием интерференционного поля [3]. В связи с этим при теоретическом исследовании дифракционной эффективности смешанных голограмм, представляющих собой совокупность фазовой и амплитудной голографических решеток [4], а также для удовлетворительной интерпретации получаемых при изучении кристалла ВТО экспериментальных данных необходимо знать точное численное значение коэффициента поглощения для конкретного образца. В то же время в известной литературе (например, [5]) значение коэффициента поглощения кристалла ВТО для длины волны 633 нм дано в пределах от 30 м^{-1} до 50 м^{-1} , что не дает однозначной информации для конкретного образца. Известно, что в линейной оптике коэффициент поглощения кристалла кубической симметрии не зависит от направления распространения световой волны. Однако при формировании фазовой голограммы в кристалле возникает внутреннее электрическое поле, которое может воздействовать не только на тензор диэлектрической проницаемости кристалла, но и на его коэффициент поглощения. Поэтому принципиально возможно нарушение изотропного характера коэффициента поглощения кристалла.

Целью настоящей работы было изучить возможную зависимость коэффициента поглощения образца кристалла ВТО от ориентационного угла кристалла в срезе (110), который использовался для записи смешанных пропускающих голограмм, а также определить величину коэффициента поглощения этого образца.

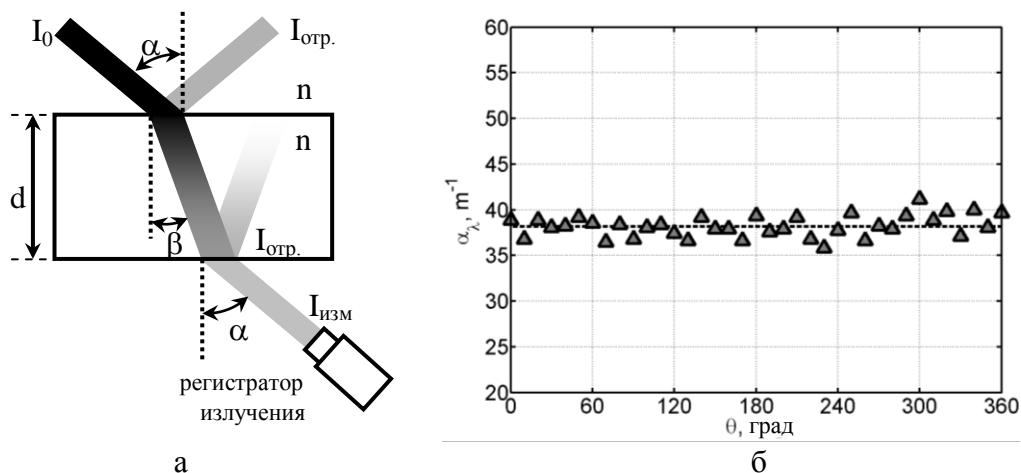
Известно (см., например, [6]), что ослабление интенсивности электромагнитного излучения по мере его распространения через поглощающую среду описывается законом Бугера. При этом для экспериментального измерения коэффициента поглощения α_λ , зависящего от длины волны, в случае плоскопараллельной оптически однородной среды (далее кристалла ВТО) закон Бугера может быть представлен в виде:

$$\alpha_\lambda = - \frac{\ln \left(\frac{I_{\text{изм.}}}{I_0 T_1 T_2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \sin \alpha}{n_2} \right)^2}}{d}, \quad (1)$$

где I_0 – начальная интенсивность пучка до вхождения в кристалл,

$I_{изм.}$ – измеряемая величина интенсивности пучка после прохождения кристалла,
 α – угол падения пучка на лицевую (первую) грань кристалла,
 n_1 – абсолютный показатель преломления воздуха (полагался равным единице),
 n_2 – абсолютный показатель преломления кристалла,
 d – толщина кристалла,
 T_1 и T_2 – коэффициенты пропускания пучка (по интенсивности) первой и второй гранями кристалла соответственно.

Для наглядности на рисунке 1а представлена геометрия распространения светового пучка при проведении подобных экспериментальных исследований. Здесь $I_{отр.1}$ и $I_{отр.2}$ – интенсивности отраженных от лицевой (первой) и задней (второй) граней кристалла частей распространяющегося светового пучка, α – угол падения светового пучка на кристалл, β – угол преломления пучка в кристалле.



а) – геометрия распространения светового пучка при прохождении его через кристалл ВТО; б) – экспериментально полученная зависимость коэффициента поглощения кристалла ВТО от его пространственной ориентации, характеризуемой ориентационным углом θ , где \blacktriangle – экспериментальные точки, а пунктирная горизонтальная линия определяет усредненное значение коэффициента поглощения

Рисунок 1 – Экспериментальное исследование коэффициента поглощения кристалла ВТО

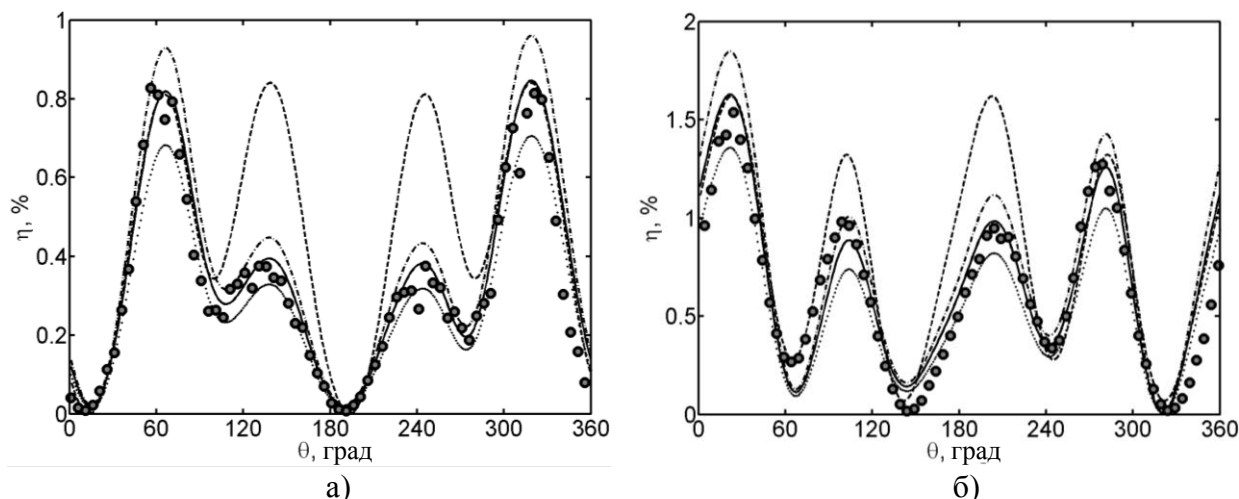
Отметим, что в случае исследования коэффициента поглощения ФРК необходимым является условие освещения кристалла световым пучком, направленным под углом к его лицевой грани, так как в случае его нормального падения на кристалл при многократных отражениях от двух граней будет происходить интерференция когерентных волн, приводящая к формированию в кристалле голографической решетки, которая в свою очередь будет обеспечивать перенос энергии электромагнитного излучения. При этом, как известно, величина переноса энергии излучения будет непосредственно зависеть от пространственной ориентации кристалла [7].

На рисунке 1б представлены экспериментальные данные зависимости коэффициента поглощения кристалла ВТО среза (110) от его пространственной ориентации для длины волны $\lambda = 632,8$ нм. Методика проведения эксперимента заключалась в следующем. По истечении промежутка времени $\tau \approx 30$ с (см. также [8]), в течение которого происходило непрерывное освещение кристалла ВТО лазерным пучком, открывалась светочувствительная часть фотодиода ФД-7К, выступающего в качестве регистратора излучения и соединенного непосредственно с цифровым вольтметром, показания которого фиксировались. После этого светочувствительная часть фотодиода снова перекрывалась и производился поворот кристалла на 10° . При проведении исследования лазерный пучок был поляризован в плоскости падения, а экспериментально измеренная величина удельного вращения плоскости поляризации ρ составляла 112 рад/м и принималась во внимание при расчете коэффициента пропускания T_2 .

В результате проведенного исследования было выявлено, что коэффициент поглощения почти не зависит от пространственной ориентации кристалла, а его усредненное значение для данного образца ВТО составляет $38,2$ м⁻¹ и принадлежит интервалу возможных значений из [5].

С учетом полученного значения коэффициента поглощения на рисунке 2 представлены теоретические и экспериментальные данные зависимости дифракционной эффективности смешанных голограмм, сформированных в кристалле ВТО среза (110) толщиной $7,7$ мм, от пространственной ориентации кристалла. Все параметры кристалла ВТО взяты из [9].

Таким образом, выявлено, что коэффициент поглощения кристалла ВТО почти не зависит от пространственной ориентации кристалла, а найденное в этой работе его точное значение способствует лучшему схождению результатов теории и эксперимента при исследовании ориентационной зависимости дифракционной эффективности смешанных голографических решеток, сформированных в кристалле данного типа.



Штриховая линия – без учета вклада амплитудной решетки; сплошная линия – с учетом вклада амплитудной решетки при $\alpha_\lambda = 38,2 \text{ м}^{-1}$; штрих-пунктирная линия – с учетом вклада амплитудной решетки при $\alpha_\lambda = 30 \text{ м}^{-1}$; пунктирная линия – с учетом вклада амплитудной решетки при $\alpha_\lambda = 50 \text{ м}^{-1}$; • – экспериментальные данные
Рисунок 2 – Зависимости дифракционной эффективности η голограмм, записанных в кристалле ВТО, от ориентационного угла θ при начальных азимутах поляризации считывающего пучка $\psi_0 = 0$ (а) и $\psi_0 = 90^\circ$ (б)

ЛИТЕРАТУРА

1. Шандаров, С.М. Обнаружение вклада обратного флексоэлектрического эффекта в фоторефрактивный отклик в монокристалле титаната висмута / С.М. Шандаров, С.С. Шамаков, Н.И. Буримов [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 2012. – Т. 95, № 12. – С. 699–702.
2. Contribution of the inverse flexoelectric effect to counterpropagating two-wave mixing of light beams in photorefractive crystals / S.M. Shandarov, S.S. Shmakov [et al.] // J. Opt. Technol. – 2013. – Vol. 80, № 7. – P. 409–414.
3. Андреева, О.В. Прикладная голография: учебное пособие / О.В. Андреева. – СПб.: СПбГУИТМО, 2008. – 184 с.
4. Montemezzani, G. Light diffraction at mixed phase and absorption gratings in anisotropic media for arbitrary geometries / G. Montemezzani, M. Zgonik // Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 55, № 1. – P. 1035–1047.
5. Петров, М.П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб.: Наука. С.-Петербургское отд-ние, 1992. – 320 с.
6. Ландсберг, Г.С. Оптика / Г.С. Ландсберг. – М.: Наука, 1976. – 926 с.
7. Шепелевич, В.В. Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах: монография / В.В. Шепелевич. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.
8. Шепелевич, В.В. Одновременная дифракция двух световых волн в кубических фоторефрактивных пьезокристаллах / В.В. Шепелевич, Н.Н. Егоров // Письма в ЖТФ. – 1991. – Т. 17, № 5. – С. 24–27.
9. Diffusion recording in photorefractive sillenite crystals: an analytical approach for engineering purposes / E. Shamonina [et al.] // Opt. Commun. – 2000. – Vol. 180, № 1-3. – P. 183–190.

О. В. МАТЫСИК, Л. В. ВИКТОРОВИЧ

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ НЕЯВНОГО ТИПА В СЛУЧАЕ НЕЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ К НОРМАЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение $Ax = y$, где A – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль является собственным значением (случай неединственного решения). Поэтому рассматриваемая задача некорректна. Для решения уравнения $Ax = y$ применим неявную итерационную процедуру

$$x_n = x_{n-1} - \alpha(Ax_n - y), \quad x_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь E – тождественный оператор, α – итерационный параметр.

Обозначим через $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H . Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. Пусть $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha > 0$. Тогда для итерационного метода (1) верны следующие утверждения:

а) $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) процесс (1) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$, где x^* – минимальное решение.

Доказательство

Применив оператор A к (1), получим $A(E + \alpha A)x_n = Ax_{n-1} + \alpha Ay$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то имеем $(E + \alpha A)(Ax_n - \Pi(A)y) = Ax_{n-1} - \Pi(A)y$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, где $v_n \in M(A)$, тогда справедливо записать: $(E + \alpha A)v_n = v_{n-1}$. Отсюда $v_n = (E + \alpha A)^{-1}v_{n-1} = (E + \alpha A)^{-n}v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ для любого $x \in M(A)$. Так как $\alpha > 0$, то $\|(E + \alpha A)^{-1}\| < 1$. Поэтому справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|(E + \alpha A)^{-n}v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{(1 + \alpha\lambda)^n} \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{dE_\lambda v_0}{(1 + \alpha\lambda)^n} \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{(1 + \alpha\lambda)^n} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|v_0 - E_{\varepsilon_0} v_0\| < \varepsilon \end{aligned}$$

при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Здесь $\frac{1}{1 + \alpha\lambda} \leq q(\varepsilon_0) < 1$ при $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$. Следовательно, $v_n \rightarrow 0$, откуда имеем $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Поэтому $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$ [1]. Итак, а) доказано.

Докажем б). Пусть процесс (1) сходится. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (1) примет вид:

$$\begin{aligned} (E + \alpha A)x_n &= x_{n-1} + \alpha \Pi(A)y = \\ &= (E + \alpha A)x_{n-1} - \alpha Ax_{n-1} + \alpha Ax^* = (E + \alpha A)x_{n-1} + \alpha A(x^* - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - x_{n-1})$. Последнее равенство разобьём на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha(E + \alpha A)^{-1}AP(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0,$$

так как $AP(A)(x^* - x_{n-1}) = 0$;

$$\begin{aligned} \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}\Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} + \\ &+ \alpha A(E + \alpha A)^{-1}(\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1}), \end{aligned}$$

так как $x^* \in M(A)$.

Обозначим $w_n = \Pi(A)x_n - x^*$, тогда из равенства $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + \alpha A(E + \alpha A)^{-1}(x^* - \Pi(A)x_{n-1})$ получим $w_n = w_{n-1} - \alpha A(E + \alpha A)^{-1}w_{n-1}$. Следовательно, $w_n = (E + \alpha A)^{-1}w_{n-1}$ и, аналогично v_n , можно

показать, что $w_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$. Отсюда $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$. Теорема доказана.

Замечание. Так как $x_0 = 0$, то $x_n \rightarrow x^*$, т. е. неявный итерационный процесс (1) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bialy, H. Iterative Behandlung Linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.

Г. Л. МУРАВЬЕВ, С. В. МУХОВ, В. И. ХВЕЩУК

БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

К РАЗРАБОТКЕ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

В практике проектирования специализированного ПО с повышенными требованиями к степени надежности проектных решений, срокам и стоимости разработки требуются особые подходы. Наиболее перспективны подходы [1–4]:

- базирующиеся на переносе акцента в разработке проектов на более высокий, абстрактный (системный) уровень описания с использованием соответствующих высокоуровневых спецификаций;
- сочетаемые с эволюционным, итеративным прототипированием базовых проектных решений, методом «расширения ядра»;
- использующие библиотеки готовых, верифицированных проектных решений, каркасное проектирование и программирование, паттерны, библиотечные иерархии классов (при работе в объектно-ориентированных технологиях) и т. д.;
- на базе порождающих технологий, позволяющие генерировать проектные спецификации из библиотек верифицированных решений, шаблонов и т. д.

Перечисленное соответствует направлению, которое первоначально культивировалось в области автоматизации проектирования аппаратных средств, в САПР БИС, СБИС. В части классического программирования – это проектирование в CASE-системах, например, в стандарте UML, с возможностью автоматической генерации каркасов программ в терминах выбранного языка и парадигмы программирования.

Здесь рассматривается подход и средства для организации разработки специализированного программного обеспечения по исходным спецификациям поведенческого уровня.

Это специализированное ПО систем для работы с исполнимыми спецификациями, программными моделями и т. д. Например, в системах автоматизации проектирования аппаратных средств, имитации процессов, в составе соответствующих проектных процедур. В системах обучения проектированию, программированию, моделированию, где требования к эффективности использования ресурсов ослаблены, а потребность в исполнимости и контролируемости принимаемых обучаемым решений повышена.

Это проектирование ПО информационных систем, базирующихся на интенсивном использовании баз данных и отличающихся преимущественно типовой обработкой данных. Сюда попадает широкий круг систем экономического назначения, использующих табличные, реляционные представления обрабатываемых данных.

Необходимое качество исполнимых спецификаций, как правило, обеспечивается:

- использованием высокоуровневых, поведенческих спецификаций проекта, предоставлением проектировщику возможности работать на понятийном уровне, в рамках и терминах привычной предметной области;
- применением метапрограммирования, шаблонов, автоматическим построением модельных, проектных спецификаций путем анализа высокоуровневых спецификаций и обработки их по заранее установленным правилам с использованием готовых процедур, библиотек и шаблонов функций, поддерживающих все этапы разработки;
- выбором в качестве средств внутреннего представления спецификаций проектов высокоуровневых алгоритмических языков с развитым инструментарием и эффективными трансляторами.

При этом уменьшение размерности исходных описаний проектов обеспечивает дополнительные возможности для оценки их корректности как путем моделирования самих спецификаций (в том числе и на алгоритмическом уровне), так и посредством формального доказательства их корректности. Кроме того, проблемы верификации проектов переносятся в область верификации процедур синтеза и спецификаций проекта. Это позволяет снижать сложность решаемых задач, ослабить ограничения на объем проектируемой аппаратуры, что актуально при разработке цифровой техники и т. п.

Соответственно указанные подходы требуют разработки и использования аппарата понятийных (концептуальных) моделей, настроенных на предметную область и определяющих множество ее объектов – компонентных моделей и отношений между ними. Это является основой инструментария как для спецификации проектируемой системы, так и последующей генерации программных кодов по заранее верифицированным процедурам.

Исполнимость спецификаций предполагает формализованное построение языка спецификации и наличие «исполнителя» – соответствующей программной поддержки генерации загрузочных кодов либо интерпретации спецификаций.

Инструментально средства разработки могут строиться как совокупность информационного обеспечения (это библиотеки описаний проектов и ЯВУ-описаний проектов) и программного обеспечения. Последнее включает подсистемы первичной обработки описаний и генерации исполнимых спецификаций. Кроме этого, система должна обеспечивать необходимую информационную поддержку с учетом иерархичности проектов, степени их детализации и версий описания.

Опыт использования указанных подходов для построения средств обучения разработке и проектированию программ, обучения имитационному моделированию применительно к системам проектирования со входным языком VHDL для производственных систем приведен в [5–8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов, С.А. Технологии разработки программного обеспечения / С.А. Орлов. – СПб.: Питер, 2004. – 527 с.
2. Липаев, В.В. Программная инженерия. Методологические основы: учеб. / В.В. Липаев; Гос. ун-т – Высшая школа экономики. – М.: ТЕИС, 2006. – 608 с.
3. Маклаков, С.В. Создание информационных систем с AllFusion Modeling Suite / С.В. Маклаков. – М: ДИАЛОГ-МИФИ, 2005. – 432 с.
4. Мяцяшек, Л.А. Анализ требований и проектирование систем. Разработка информационных систем с использованием UML / Л.А. Мяцяшек, пер. с англ. – М: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 432 с.
5. Муравьев, Г.Л. Автоматизация обучения алгоритмизации и программированию / Г.Л. Муравьев, С.В. Мухов // Вести ИСЗ. – 2004. – № 3. – С. 24–29.
6. Муравьев, Г.Л. Компьютерная генерация спецификаций сетевых архитектур заданной сложности / Г.Л. Муравьев, А.Н. Никонюк, В.И. Хвещук // Технологии информатизации и управления: сб. науч. ст. 2-й междунар. научно-практ. конф. (ТИМ-2011), Минск, 2011. – С. 50–53.
7. Муравьев, Г.Л. Построение моделей по описаниям, согласованным с процессным способом моделирования / Г.Л. Муравьев, В.И. Хвещук // Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2008: сб. научн. ст., Гродно: ГрГУ, 2008. – Ч. 2. – С. 235–238.
8. Мухов, С.В. Типизация моделей для обработки баз данных как основа надежности программного продукта / С.В. Мухов, Г.Л. Муравьев, Ю.П. Ашаев // Информационные системы и технологии IST'2010: материалы 6 Междунар. конф., Минск, 2010. – С. 360–364.

Г. Л. МУРАВЬЕВ, А. С. РЫЩУК

БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

О ПОСТРОЕНИИ WEB-СИСТЕМ ОПЕРАТИВНОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Существует большой класс систем обработки информации в оперативном режиме (СОО). Например, системы класса OLTP для он-лайн обработки транзакций. Они характеризуются наличием независимых потоков запросов, отличающихся случайным поведением. Их организация должна обеспечивать нужное качество обслуживания в условиях непредсказуемого колебания загрузки вычислительных средств от слабой до «пиковой». Среди них можно выделить вид, предназначенный для оперативного управления (диспетчирования) ограниченным набором обслуживающих ресурсов по запросам внешних пользователей. Например, системы поддержки диспетчеров разнообразных экстренных служб.

Их существенные особенности:

- массовость и территориальная распределенность пользователей;
 - повышенные требования к скорости обслуживания, качеству решений;
 - непрерывный контроль за состоянием обслуживающих ресурсов (специалистов, бригад, машин, механизмов и т. п.);
 - относительная алгоритмическая простота, наличие типовых решений, ограниченность типов запросов;
 - относительно невысокая квалификация персонала и пользователей.
- Требования к системам:
- работа в реальном масштабе времени, учет приоритетов запросов;
 - масштабируемость, адаптация к резкому изменению характеристик задач, росту числа пользователей;
 - рационализация труда диспетчеров, обеспечение принятия корректных решений, документированность процессов управления;
 - поддержка разнообразных средств доступа, включая традиционные средства интернета, мобильные средства;

- расширяемость как наращивание функций, замена платформы, увеличения вычислительных мощностей.

При построении таких систем основные задачи сводятся к выбору:

- архитектуры и моделей ее логического представления;
- форматов и механизмов передачи данных;
- способов распределения вычислительной нагрузки;
- механизмов конфигурирования, маршрутизации, безопасности;
- подходов к проектированию интерфейсов;
- выбору средств разработки, обеспечивающих нужные характеристики функционирования.

Преимущественно в их основе лежат модификации клиент-серверной архитектуры, обеспечивающей эффективное многопользовательское использование разделяемых ресурсов. Для поддержки интерактивности и функционирования в режиме реального времени целесообразно использовать комбинации приемов, технологий, например, балансировку вычислительной нагрузки связки клиент-сервер, очереди ожидающих запросов (long polling), протоколы обмена сообщениями браузер-сервер реального времени, полнодуплексной связи «поверх» TCP-соединения и т. п.

Для обеспечения расширяемости, масштабируемости целесообразно построение системы в виде веб-сервиса, спроектированного на основе модели MVC (Модель-Представление-Контроллер) [1]. Это предполагает логическую декомпозицию системы на «слабо связанные» компоненты – модели данных, их представление и процессы взаимодействия с пользователем (аппарат событий). При этом для дополнительного структурирования системы, повышения масштабируемости, а также с учетом требований множественности доступа и производительности при построении серверной части системы предлагается использовать интерфейс REST [2] (RESTful API на базе фреймворка Yii).

Указанный фреймворк, базирующийся на компонентной модели, обеспечивает наиболее высокую скорость среди других PHP-фреймворков. Использует парадигму MVC, модели доступа к данным DAO, ActiveRecord с поддержкой SQL-запросов, обеспечивает независимость от особенностей конкретной базы данных. В качестве модели базы данных выбрана реляционная модель на базе оптимистичного параллельного доступа, в качестве СУБД – MySQL. Для предотвращения межсайтового скриптинга, атак типа CSRF (подделка межсайтовых запросов) возможно использование библиотеки HTMLPurifier и других средств фреймворка.

При использовании интерактивных пользовательских интерфейсов веб-приложений в качестве технологии передачи данных целесообразно использовать Ajax, поддерживающий «фоновый» обмен данными между браузерами и веб-сервером. Отсутствие необходимости полной перегрузки веб-страниц при обновлении данных дополнительно снижает трафик и нагрузку на сервер, повышает «реакцию» интерфейса. В качестве формата данных предлагается использовать JSON (JavaScript Object Notation), который оперирует универсальными структурами данных, поддерживаемыми современными языками, отличается «прозрачным» синтаксисом, избыточностью, простотой применения [3].

Для реализации клиентской составляющей перспективен фреймворк ExtJs, применяемый для разработки веб-приложений и высоконагруженных пользовательских интерфейсов. Его средства поддерживают технологию MVC на клиентской стороне, обеспечивают кроссбраузерность, использование широко распространенных браузеров. Дополнительный прирост производительности достигается балансировкой и снижением нагрузки на сервер за счет поддержки локальных хранилищ данных библиотеки ExtJs (Ext.data.Store) и переноса трудоемких функций в клиентские приложения. Эти же средства могут использоваться для построения пользовательских интерфейсов, отвечающих требованиям стандарта ISO 9241-11, имитирующих привычный интерфейс в «стандарте» ОС.

Указанные подходы макетировались при разработке систем для служб экстренного реагирования. Так, для служб помощи автовладельцам система строилась как кроссплатформенный REST-веб-сервис, включающий подсистемы оператора, диспетчера, администратора. Информация от клиентов и служб принималась в он-лайн форме и регистрировалась. Запросы пользователей представляли заявки на эвакуацию транспорта и на оказание экстренной сервисной помощи. Службы информировали диспетчера о текущем состоянии и месте нахождения работников, транспортных средств, механизмов. Диспетчирование заключалось в подборе средств, персонала, расстановке приоритетов, контроле исполнения. Проведенные испытания показали удовлетворительность принятых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архитектура MVC [Электронный ресурс]. – 2011. – Режим доступа: <http://en.wikipedia.org/wiki/Model-view-controller>.
2. Интерфейс REST [Электронный ресурс]. – 2012. – Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/Representational_state_transfer.
3. Официальная документация формата JSON [Электронный ресурс]. – 2010. – Режим доступа: <http://www.json.org>.

А. А. МУХАМБЕТОВА, Ж. А. САРТАБАНОВ
 АРГУ им. К.Жубанова (г. Актобе, Казахстан)

**РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ
 D-УРАВНЕНИЙ**

Пусть $D_a = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle a(\tau, t), \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle$ – оператор дифференцирования функции $x(\tau, t)$ от многомерного

времени $(\tau, t) = (\tau, t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R \times R^m$, где $R = (-\infty, +\infty)$, $a = (a_1, \dots, a_m)$,

$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – знак скалярного произведения векторов.

Рассмотрим линейную гамильтонову систему

$$D_a x = JP(\tau, t)x \quad (1)$$

с симплексной единицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

где E – единичная n -матрица,

O – нулевая матрица,

$P(\tau, t) = [P_{kj}(\tau, t)] = P^T(\tau, t)$ – $2n$ -матрица,

$x = (x_1, \dots, x_{2n})$ искомая вектор-функция.

Предположим, что $a(\tau, t)$ и $P(\tau, t)$ обладают свойствами гладкости $C_{\tau, t}^{(0,1)}$ и (θ, ω) – периодичности вида

$$a(\tau + \theta, t + q\omega) = a(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(R \times R^m), \quad q \in Z^m, \quad (2)$$

$$P(\tau + \theta, t + q\omega) = P(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(R \times R^m), \quad q \in Z^m, \quad (3)$$

где $q = (q_1, \dots, q_m)$ изменяется во множестве Z^m целочисленных векторов,

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ – вектор-период с рационально несоизмеримыми компонентами $\omega_1, \dots, \omega_m$ вместе с периодом $\omega_0 = \theta$.

Доказывается, что при условиях (2) и (3) характеристический многочлен

$$h(\rho) \equiv \det[\rho E - X(\theta, \sigma)]$$

является возвратным: $\rho^{2n} h\left(\frac{1}{\rho}\right) = h(\rho)$, где $\sigma = \varphi(0, \tau, t)$ – интеграл уравнения $\frac{dt}{d\tau} = a(\tau, t)$

с характеристикой $t = \varphi(\tau, s, \sigma) |_{\tau=s} = \sigma$, $X(\tau, t)$ – матрицант системы (1).

Предполагается также, что кратности k_j корней $\rho_j(\sigma)$ многочлена $h(\rho)$ не зависят от σ , причем удовлетворяют условию: либо $|\rho_j(\sigma)| < 1$, либо $|\rho_j(\sigma)| = 1$, либо $|\rho_j(\sigma)| > 1$, $j = \overline{1, l}$. $k_1 + \dots + k_l = n$.

При выполнении этих условий на основе [1–3] доказывается основной результат, что мультипликаторы $\rho_j(\sigma)$ обладают свойствами гладкости и ω -периодичности, причем система (1) устойчива тогда и только тогда, когда $|\rho_j(\sigma)| = 1$ и их элементарные делители простые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967.
2. Самойленко, А.М. Элементы математической теории многочисленных колебаний / А.М. Самойленко. – М.: Наука, 1987.

3. Мухамбетова, А.А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем / А.А. Мухамбетова, Ж.А. Сартабанов. – Актюбе, 2007. – 168 с.

Е. М. ОВСИЮК, О. В. ВЕКО, К. В. КАЗМЕРЧУК, М. В. МАТВЕЙЧУК
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

О ВЛИЯНИИ ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА НА ПОВЕДЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ В МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

Релятивистская теория скалярной частицы Кокса с внутренней структурой исследована в присутствии электромагнитных и гравитационных полей. Общая теория конкретизируется для простых типов геометрий: Евклида, Лобачевского, Римана.

Волновые уравнения для такой частицы, релятивистское обобщенное типа Клейна–Фока–Гордона и нерелятивистское типа Шредингера, решены точно в однородных магнитном и электрическом полях, в пространстве Минковского. Нетривиальная дополнительная внутренняя структура частицы модифицирует частоту квантового осциллятора эффективно возникающего из-за присутствия магнитного поля.

Обобщение этих систем проведено на случай гиперболического пространства Лобачевского. В магнитном поле обобщенное радиальное уравнение решается точно, однако движение вдоль направления магнитного поля описывается одномерным уравнением Шредингера со сложным потенциалом барьерного типа, которое не поддается аналитическому решению.

В присутствии электрического поля ситуация в пространстве Лобачевского оказывается похожей: радиальное уравнение легко решается в функциях Бесселя, уравнение же в переменной z оказывается существенным усложнением известной ситуации в плоском пространстве, решаемой в функциях Эйри. Здесь возникает дифференциальное уравнение типа Фукса с 6-ю особыми точками, и оно может исследоваться лишь качественно и численно.

Аналогичным выглядит и поведение этой системы в сферическом пространстве Римана, изменения происходят только за счет компактности геометрии этого пространства. Характер усложнения дифференциальных уравнений из-за неевклидовости геометрии пространства тот же.

Может быть сделан общий вывод: проявления крупномасштабной структуры Вселенной в поведении элементарных частиц в очень сильной степени зависят от того, какими уравнениями мы описываем сами частицы, любые модификации таких уравнений приводят к новым физическим эффектам из-за неевклидовости геометрии Вселенной.

Е. В. ПРОКОПОВИЧ, С. В. КАПОРА, В. С. САВЕНКО
МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

ЭЛЕКТРОННЫЕ МЕХАНИЗМЫ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ КРИСТАЛЛА СУРЬМЫ

При пропускании электрического импульса тока через кристалл во время деформации, возникают вторичные эффекты пинч- и скин-эффекты, а также термическое разупрочнение решетки.

Проводя оценку и вклад этих факторов в явление электропластичности при двойниковании кристаллов сурьмы предположим, что на проводник с током прямоугольной формы под влиянием собственного магнитного поля действует сила:

$$F_x = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial x} = -\frac{\partial\sigma_x}{\partial x},$$

где σ_x – механическое напряжение.

Основное уравнение гидромагнетизма применительно к рассматриваемому случаю, имеет вид:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \nabla(\rho \nabla B + \nabla V B).$$

Из последнего выражения следует, что при одной и той же плотности тока, например, $J_m=10^5$ А/см² пинч-эффект будет выражен тем больше, чем больше радиус использованных образцов.

Таким образом, пинч-эффект является масштабным эффектом в том смысле, что он квадратично зависит от радиуса образца r как и от амплитудной плотности тока J_m . Для тонких образцов он практически не наблюдается, при радиусе образца 0,25 мм этот эффект не оказывает какого-либо действия на деформацию титана с током [1–7].

На примере кристалла Sb при плотности тока $j = 1,5 \cdot 10^3 \text{ A/mm}^2$ и радиусе сечения проводника $r = 2 \text{ мм}$ рассчитано собственное магнитное поле тока, возникающее на поверхности проводника $H_m = 3 \cdot 10^3 \text{ (э)}$. При $r = 5 \text{ мм}$ максимальном значении H_m принимает значение $H_m = 4,5 \cdot 10^3 \text{ (э)}$.

Наложение на зону деформации скрещенных электромагнитных полей при таких значениях (график 1) позволяет произвести расчет для оптимального угла α при наложении внешнего магнитного поля в условиях суперпозиции магнитных полей H и H_m при плотности тока $1,5 \cdot 10^3 \text{ A/mm}^2$ и различных радиусах образцов.

Таким образом, видно, что чем больше радиус образца, тем соответственно больше пинч-эффект, который является масштабным эффектом и квадратично зависит от r (а также от j). Следует отметить, что для образцов малого радиуса он не должен наблюдаться, а в образцах, диаметром более 1 мм, могут наблюдаться эффекты нагревания за счет джоулева тепла.

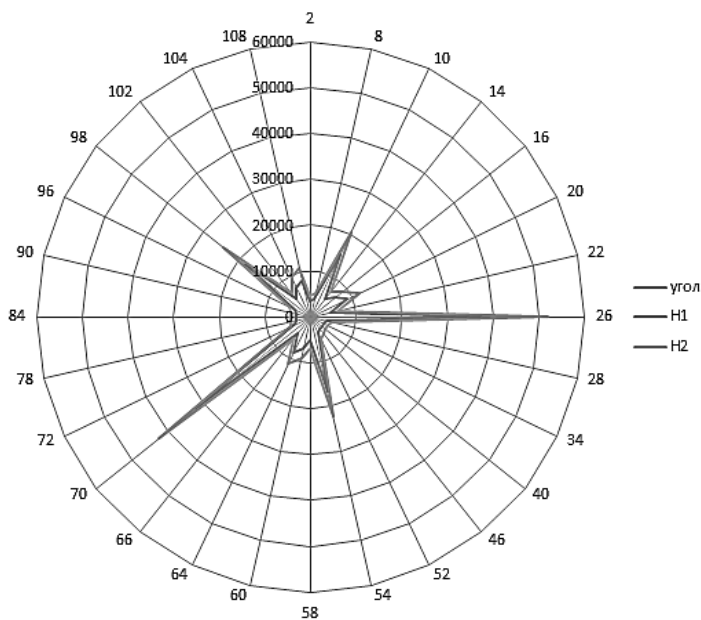


График 1 – Зависимость внешнего магнитного поля H от собственного магнитного поля H_m и угла α между ними

Из графика видно, что максимальное значение значение внешнего магнитное поле H принимает при угле 26° , при $r = 2 \text{ мм}$ и равно $38,9 \cdot 10^3 \text{ э}$, при $r = 5 \text{ мм}$ $H = 51,8 \cdot 10^3 \text{ э}$.

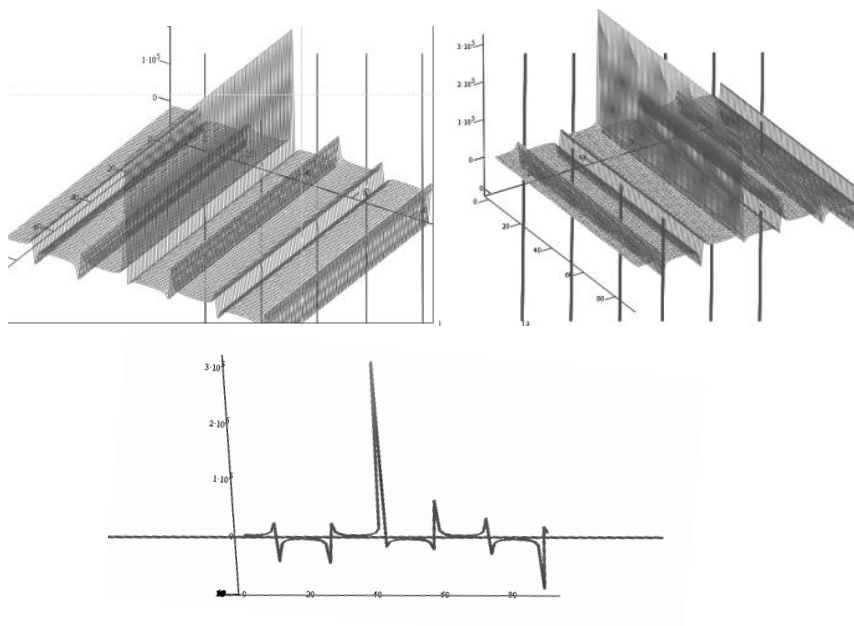


График 2 – Трехмерный график зависимости внешнего магнитного поля H от собственного магнитного поля H_m и радиуса образца r

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович, А.А. Управляемые термоядерные реакции / А.А. Арцимович. – М.: Физматгиз, 1961.
2. Владимиров, В.В. Пинч-эффект в плазме твердого тела / В.В. Владимиров // Успехи физических наук. – 1975. – № 1. – С. 79–118.
3. Bennett, W.H. Magnetically self-focusing streams / W.H. Bennett // Phys. Rev. – 1934. – Vol. 45. – P.890.
4. Савенко, В.С. Механическое двойкование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий / В.С. Савенко. – Минск: БГАФК, 2003. – 203с.
5. Способ повышения пластичности проводящих материалов на основе эффекта: пат. Российской Федерации на изобретение / В.С. Савенко, А.И. Пинчук. – № 2052514; опубли. 1996 // Способ повышения пластичности деталей. – РФ, 1669.
6. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы / Ю.И. Баранов, О.А. Троицкий, Ю.С. Авраамов, А.Д. Шляпин. – М.: МГИУ, 2001 – 844 с.
7. Троицкий, О.А. Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / О.А. Троицкий, В.С. Савенко. – Минск: ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с.

В. И. РАНЦЕВИЧ, В. Ф. САВЧУК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРАВИЛА ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ К НЕЯВНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – положительный ограниченный и несамосопряжённый оператор. Ноль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением. Предположим, что при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение. В случае приближенной правой части уравнения $y_\delta: \|y - y_\delta\| \leq \delta$ приближения к точному решению x уравнения (1) будем находить по формуле

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left[\left(E - \alpha(A^*A)^2 \right) z_n + 2\alpha(A^*A)A^*y_\delta \right] + \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^*A)^2 \right) u_n, \quad z_0 \in H, \tag{2}$$

где u_n – ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \leq \beta$.

Обозначим $C = \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \left(E - \alpha(A^*A)^2 \right)$, $B = 2 \left(E + \alpha(A^*A)^2 \right)^{-1} \alpha(A^*A)A^*$.

Применим к методу (2) правило останова по соседним приближениям

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \leq \varepsilon, \tag{3}$$

где ε – уровень останова. Использование правила (3) делает метод (2) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокорпредставимости точного решения.

Справедлива

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n . Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n , удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, $\|u_n\| \leq \beta$;
- б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$, $\delta, \beta \rightarrow 0$ и $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, где $d > 1$, $p \in (0, 1)$, то

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0.$$

Г. К. САВЧУК, Н. П. ЮРКЕВИЧ
БНТУ (г. Минск, Беларусь)

ИССЛЕДОВАНИЕ КЕРАМИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВЧ-МАТЕРИАЛОВ

Дисциплина «Физика» при обучении студентов технических ВУЗов входит в обязательную базовую часть математического и естественнонаучного цикла. Согласно существующим на сегодняшний день стандартам, основной целью обучения студентов данному предмету является изучение основных физических законов и закономерностей, а также физических методов теоретического и экспериментального исследования. Немаловажным при обучении дисциплине «Физика» является проведение анализа современных научных направлений исследований с точки зрения научных и практических приложений.

В этом аспекте при обучении студентов инженерно-технических специальностей особое внимание следует уделять методам экспериментального и теоретического исследования научных проблем, так как, как правило, большинство таких методов сложно реализовать на практике при проведении лабораторных и практических занятий. Поэтому следует активно использовать возможности лекционных курсов с привлечением мультимедиа, наглядного компьютерного моделирования. Здесь следует делать акцент на обучении студентов таким методам, как моделирование, анализ, сравнение, системный подход, структурно-функциональный метод, классификация, обобщение и др.

При проведении лабораторных и практических занятий необходимо включать материал, связанный с такими методами, как планирование эксперимента, выдвижение рабочей гипотезы, разработка метода проведения эксперимента, наблюдение и измерение, систематизация полученных результатов, анализ и обобщение экспериментальных данных, выводы о достоверности рабочей гипотезы.

Всем этим методам студентов необходимо обучать, так как в последующем им придется в практике реальной жизни решать задачи научного и прикладного характера, которые актуальны для развития науки и экономики страны.

На данном этапе развития для Республики Беларусь актуальными являются следующие проблемы научных исследований: физика конденсированных сред, физическое материаловедение, в том числе новые материалы и структуры, фундаментальные основы лазерных технологий, включая обработку и модификацию материалов, оптическую информатику, связь, навигацию, медицину и проблемы создания акустического лазера и т. д. Для подготовки специалистов, способных работать над данными проблемами, уже при обучении студентов в ВУЗе необходимо проводить анализ научных исследований в данных областях.

Целью данной работы является анализ актуальных проблем научных исследований новых керамических СВЧ-материалов для малогабаритных антенн, работающих в диапазоне частот сигналов GPS-ГЛОНАСС спутников.

В сверхвысокочастотных (СВЧ) устройствах различного назначения широко применяются следующие элементы СВЧ электроники: резонаторы, фильтры, малогабаритные антенны. Как правило, основу перечисленных элементов составляет диэлектрическая керамика.

Страны Евросоюза используют, в основном, электронные устройства, работающие в диапазоне частот сигналов навигационных спутников GPS. В то же время Российская федерация интенсивно переводит работу электронных устройств на сигналы ГЛОНАСС диапазона. Поскольку Республика Беларусь находится по соседству и с Евросоюзом, и с Россией, то перед учеными Республики ставится задача разработать активные малогабаритные антенны, работающие в диапазоне частот 1.570-1.610 ГГц, который одновременно охватывает сигналы GPS-ГЛОНАСС спутников.

Как правило, в качестве антенных элементов выступают микрополосковые керамические патч-элементы (КЭ). Керамические материалы, которые используются для изготовления КЭ малогабаритных антенн, работающих одновременно в диапазонах GPS и ГЛОНАСС, наряду с миниатюризацией антенны должны обеспечивать эффективность ее работы.

Миниатюризация антенны обеспечивается за счет высоких значений диэлектрической проницаемости (ϵ) керамического материала. Однако с ростом ϵ снижается значение эффективности антенны, вызванное ростом мощности отраженной электромагнитной волны от границы раздела поверхности керамической антенны с воздухом [1]. Теоретические вычисления, выполненные для ряда моделей антенн, показали, что приемлемое значение для эффективности антенны должно быть не менее 70% [2–3]. Для обеспечения такой эффективности антенны в полосе пропускания GPS-ГЛОНАСС сигнала необходимо разработать керамические материалы с высокой температурной стабильностью диэлектрической проницаемости, при этом значение диэлектрической проницаемости материала должно быть $\epsilon < 30$, а тангенс угла диэлектрических потерь должен лежать в интервале $(1-5) \cdot 10^{-4}$ [1].

При разработке любого нового керамического материала первоначально необходимо проследить и установить закономерности в цепочке «состав-структура-свойства». Анализ закономерностей между составом, кристаллической структурой, микроструктурой и физическими свойствами позволит определить вектор дальнейших исследований с целью получения требуемых для практического применения свойств керамического материала.

Проблема разработки керамических материалов для малогабаритных антенн диапазона GPS-ГЛОНАСС решается с использованием таких физических методов, как рентгенофазовый и рентгеноструктурный анализы, метод дифракции отраженных электронов, методы электронной спектроскопии и электронной микроскопии, дифференциально-термический и термогравиметрический анализы. В качестве теоретических методов необходимо использовать методы математического планирования и оптимизации проведения эксперимента, законы смещения для многокомпонентных систем, теория спекания многокомпонентных систем, теория электромагнитного излучения, теория диэлектриков и сегнетоэлектричества и т. д.

Применение указанных выше методов показало, что СВЧ керамические материалы со значениями температурного коэффициента диэлектрической проницаемости близкими к нулю, $\epsilon < 30$ и обеспечивающие полосу

пропускания GPS-ГЛОНАСС сигнала ≥ 40 МГц, можно получить, например, как один из вариантов в системе $(Zn_{1-x}Mg_x)\text{-Ti-O}$ [3] на основе твердых растворов состава $(Zn_{1-x}Mg_x)\text{TiO}_3$ - $(Zn_{1-x}Mg_x)_2\text{TiO}_4$ - TiO_2 .

На основе полного анализа процесса получения новых керамических СВЧ-материалов на базе различных многокомпонентных систем, на основе изучения типа элементарной кристаллической ячейки и параметров кристаллической структуры получаемых керамик, на основе исследования влияния особенностей структуры на физические и диэлектрические свойства получаемых материалов, определяя области практического применения исследуемых материалов, можно показать, что первостепенное значение для студентов имеет не столько набор имеющихся у них знаний и навыков, сколько стремление к постоянному профессиональному и личностному развитию.

Студенту в процессе обучения необходимо сформировать компетенции, позволяющие эффективно работать не только в своей области. Как специалист, он должен быть способен действовать и в смежных отраслях. Данные качества позволяют выполнять свою работу эффективно, на уровне мировых стандартов, следовательно, сделают будущего специалиста конкурентоспособным в условиях рыночной экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов, А.И. Керамические материалы (диэлектрические, пьезоэлектрические, сверхпроводящие): условия получения, структура, свойства / А.И. Акимов, Г.К. Савчук. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2012. – 256 с.
2. Акимов, А.И. Керамические материалы на основе титанатов цинка / А.И. Акимов, Г.К. Савчук, А.К. Летко // Актуальные проблемы физики твердого тела: матер. 5-й меж-дунар. конф., Минск, октябрь 2011. – Минск, 2011. – Т. 1. – С. 124–127.
3. Савчук, Г.К. Получение и диэлектрические свойства керамических материалов на основе системы $ZnO\text{-TiO}_2$ / Г.К. Савчук, А.Л. Карпей, А.К. Летко // Перспективные материалы. – 2014. – № 1. – С. 19–25.

В. Ф. САВЧУК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

СЛУЧАЙ САМОСПРЯЖЁННОГО ОПЕРАТОРА В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРИБЛИЖЁННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть H и F – гильбертовы пространства и A – линейный оператор, действующий из H в F . Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A , однако нуль принадлежит его спектру.

Решается уравнение:

$$A_\eta x = y_\delta, \quad (1)$$

где $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ и $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Предположим, что точное решение x^* уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного итерационного метода

$$\left(E + \alpha A_\eta^k\right) x_{n+1} = x_n + \alpha A_\eta^{k-1} y_\delta, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (2)$$

Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Тогда итерационный метод (2) запишется в виде:

$$x_n = g_n(A_\eta) y_\delta, \quad (3)$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^k)^n} \right] \geq 0$. Причем $g_n(\lambda)$ удовлетворяют условиям

$$\sup_{[0, M]} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \quad \gamma = k\alpha^{1/k}, \quad (n > 0), \quad (4)$$

$$\sup_{[0, M]} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \quad (n > 0), \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha} \right)^{s/k}, \quad (5)$$

(здесь S – степень истокорпредставимости точного решения, т. е. $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$),

$$\sup_{[0, M]} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad (n > 0), \quad (6)$$

$$\sup_{[0, M]} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Условие сходимости для метода (3) даёт

Теорема 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ и $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ и выполнены условия (4), (6), (7). Выберем параметр $n = n(\delta, \eta)$ в приближении (3) так, чтобы $(\delta + \eta)n^{1/k} \rightarrow 0$ при $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$. Тогда $x_n(\delta, \eta) \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Оценку погрешности для метода (3) даёт

Теорема 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $(0 < \eta \leq \eta_0)$, $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y_\delta - y\| \leq \delta$, и выполнены условия (4), (5). Если точное решение истокорпредставимо, т. е. $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, то справедлива оценка погрешности:

$$\|x_n(\delta, \eta) - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s/k} \rho + \gamma n^{1/k} (\delta + \eta \|x^*\|), \quad 0 < s < \infty \quad [1].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Савчук, В.Ф. К вопросу об априорном выборе параметра регуляризации в неявном методе итераций решения операторных уравнений с приближённым оператором / В.Ф. Савчук // Вестник Брестского университета. Серия 4. – 2013. – № 1. – С. 93–98.

Ж. А. САРТАБАНОВ, А. Д. САРМАН
АГРУ им. К. Жубанова (г. Актобе, Казахстан)

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ СВОБОДНЫМ ЧЛЕНОМ

В работе предложен способ построения частного решения неоднородной линейной системы, когда свободный член имеет специальную структуру.

Рассмотрим линейную систему уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = P(\tau) + f(\tau), \quad (1)$$

общая теория интегрирования которой в полном объеме изучается по программе педагогической специальности «Математика» при условии непрерывности $n \times n$ -матрицы $P(\tau)$ и свободного члена, n вектор – функции $f(\tau)$:

$$P(\tau) \in C(I), \quad (2)$$

$$f(\tau) \in C(I), \quad (3)$$

где I – некоторый промежуток числовой оси $R = (-\infty; +\infty)$.

Если при условиях (2) и (3) известно какое – либо решение $x^*(\tau)$ неоднородной системы (1), то ясно, что вопрос об интеграции ее сводится к интегрированию однородной системы:

$$\frac{dy}{d\tau} = P(\tau) y, \quad (4)$$

которая, относительно легко решается в случае постоянной матрицы

$$P = A \quad (5)$$

методом Эйлера.

В связи с этим определенная интерес представляют простые способы нахождения частных решений системы (1), когда $f(\tau)$ имеет структуру специального вида.

Одним из таких видов является то, что свободный член $f(\tau)$ можно выразить в виде:

$$f(\tau) = a \frac{\tau^k}{k!} \tilde{y}(\tau), \quad (6)$$

где некоторое решение однородной системы (4):

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = P(\tau) \tilde{y}(\tau). \quad (7)$$

Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что является частным решением самой системы (1). Действительно, в силу (6) и (7) дифференцируя (8), получим:

$$\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = a \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} \frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} + a \frac{\tau^k}{k!} \tilde{y}(\tau) = a \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} P(\tau) \tilde{y}(\tau) + f(\tau) = P(\tau) \tilde{x}(\tau) + f(\tau).$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. При условиях (2), (6) и (7) система (1) имеет частное решение (8).

Теперь обобщим лемму 1.

Пусть $f(\tau)$ является произведением произвольного многочлена на некоторое решение $\tilde{y}(\tau)$ однородной системы (4):

$$f(\tau) = \left(a_0 + a_1 \frac{\tau}{1!} + a_2 \frac{\tau^2}{2!} + \dots + a_k \frac{\tau^k}{k!} \right) \tilde{y}(\tau). \quad (9)$$

Тогда по принципу суперпозиции и согласно лемме 1 соотношение

$$\tilde{x}(\tau) = \left(a_0 \tau + a_1 \frac{\tau^2}{2!} + a_2 \frac{\tau^3}{3!} + \dots + a_k \frac{\tau^{k+1}}{(k+1)!} \right) \tilde{y}(\tau) \quad (10)$$

представляет собой решение системы (1).

Лемма 2. При условиях (2), (7) и (9) система (1) имеет частное решение $\tilde{x}(\tau)$ вида (10).

В заключение предположим, что

$$f(\tau) = p_1 \tilde{y}_1(\tau) + p_2 \tilde{y}_2(\tau) + \dots + p_\nu \tilde{y}_\nu(\tau), \quad (11)$$

где $p_1(\tau), \dots, p_\nu(\tau)$ – полиномы порядков k_1, \dots, k_ν , а $\tilde{y}_1(\tau), \dots, \tilde{y}_\nu(\tau)$ – частные решения однородной системы (4):

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{y}_j(\tau) = P(\tau) \tilde{y}_j(\tau), \quad j = \overline{1, \nu}. \quad (12)$$

Тогда аналогично доказательству леммы 2 легко показать, что n вектор-функция:

$$\tilde{x}(\tau) = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{p}_j(\tau) \tilde{y}_j(\tau), \quad (13)$$

где многочлены построены в соответствии с многочленами

$$p_j(\tau) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} \frac{\tau}{1!} + a_2^{(i)} \frac{\tau^2}{2!} \dots + a_{k_j} \frac{\tau^{k_j}}{k_j!}, \quad j = \overline{1, \nu} \quad (14)$$

в виде

$$\tilde{p}_j(\tau) = a_0^{(i)} \tau + a_1^{(i)} \frac{\tau^2}{2!} + a_2^{(i)} \frac{\tau^3}{3!} \dots + a_{k_j} \frac{\tau^{1+k_j}}{(1+k_j)!}, \quad j = \overline{1, \nu}. \quad (15)$$

Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема. При условиях (2), (11), (12) и (14) система (1) допускает частное решение $\tilde{x}(\tau)$ в виде (13), (15).

В случае (5), как отмечалось выше, иногда удастся полностью решить вопрос об интеграции системы (1). Например, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = -\sqrt{2}x_2 + (\alpha + \beta\tau)\cos\sqrt{2}\tau, \\ \frac{dx_2}{d\tau} = \sqrt{2}x_1 + (\alpha + \beta\tau)\sin\sqrt{2}\tau \end{cases}$$

с постоянными α и β .

Очевидно, что вектор-функция

$$\tilde{y}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}\tau \\ \sin\sqrt{2}\tau \end{pmatrix}$$

является решением однородной системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = -\sqrt{2}y_1, \\ \frac{dy_2}{d\tau} = \sqrt{2}y_2. \end{cases}$$

Свободные члены заданной системы представляются как произведение скалярного многочлена $p_1 = \alpha + \beta\tau$ на вектор – функцию $\tilde{y}(\tau)$. Следовательно, по доказанной теореме, вектор-функцию $\tilde{y}(\tau)$ умножив на $\tilde{p}_1(\tau) = \alpha\tau + \beta\frac{\tau^2}{2!}$, имеем частное решение:

$$\tilde{x}(\tau) = \left(\alpha\tau + \beta\frac{\tau^2}{2!} \right) \tilde{y}(\tau) = \begin{pmatrix} \left(\alpha\tau + \beta\frac{\tau^2}{2!} \right) \cos \sqrt{2}\tau \\ \left(\alpha\tau + \beta\frac{\tau^2}{2!} \right) \sin \sqrt{2}\tau \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1(\tau) = c_1 \cos \sqrt{2}\tau - c_2 \sin \sqrt{2}\tau + \left(\alpha\tau + \beta\frac{\tau^2}{2!} \right) \cos \sqrt{2}\tau, \\ x_2(\tau) = c_1 \sin \sqrt{2}\tau + c_2 \cos \sqrt{2}\tau + \left(\alpha\tau + \beta\frac{\tau^2}{2!} \right) \sin \sqrt{2}\tau \end{cases}$$

представляют собой общее решение заданной системы.

В заключении отметим, что эту идею работы можно дальше развивать, рассмотрев, например, когда свободный член представляется как произведение аналитической функции и решения однородной системы или показательной функции и решения однородной системы и др. Считаем, что такое развитие вполне может служить основой для дипломных работ студентов, даже диссертаций магистрантов педагогической направленности математической специальности.

Также заметим, что для периодических по τ систем вида (1), когда $f(\tau)$ является периодическим решением соответствующей однородной системы, то тогда, в силу доказанной теоремы, немедленно заключаем отсутствие периодического решения этой неоднородной системы, так как $\tilde{x}(\tau) = \tau f(\tau)$ не является периодическим решением [1]. Здесь имеем дело с аналогом резонансного случая в теории колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сартабанов, Ж.А. Периодты функциялар және кейбір карапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері / Ж.А. Сартабанов. – Алматы: РБК, 2001. – 108 б.

С. А. СЕРАЯ, А. А. ТРОФИМУК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

О A_4 -СВОБОДНЫХ ГРУППАХ С ИНДЕКСАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП, РАВНЫМИ ПРОСТЫМ ЧИСЛАМ ИЛИ КВАДРАТАМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Напомним, что группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4 .

Пусть K нормальная подгруппа группы G . На конференции в 2000 г., посвященной 80-летию профессора В. Гашюца, Л.А. Шеметков предложил рассмотреть строение нормальной разрешимой подгруппы группы с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп.

В работе [2, теорема 3.1] Л.А. Шеметков показал, что если индекс каждой максимальной подгруппы, не содержащей K , равен простому числу, то подгруппа K сверхразрешима. Л.Я. Поляков ([3], теорема 1) установил разрешимость нормальной подгруппы K группы G , у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K , есть простое число либо квадрат простого числа. Если предположить, что в группе индексы максимальных подгрупп, не содержащих K , делятся еще и на кубы простых чисел, то группа может быть неразрешимой. Примером служит группа $PSL(2,7)$, индексы максимальных подгрупп которой равны 7 и 8.

Из утверждения М.В. Селькина [4, следствие 3.2.6] следует, что если в группе G все максимальные подгруппы, не содержащие нормальную подгруппу K , имеют примарные индексы, то либо группа K разрешима, либо $K/S(K)$ изоморфна простой группе $PSL(2,7)$. Здесь $S(K)$ – разрешимый радикал группы K .

Так как в $PSL(2,7)$ есть подгруппа, изоморфная A_4 , то A_4 -свободная нормальная подгруппа K группы G , у которой индекс любой максимальной подгруппы, не содержащей K , примарен, является разрешимой.

В работе [5] В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская получили оценки производной, нильпотентной и p -длины нормальной подгруппы K группы G , у которой индекс каждой её максимальной подгруппы, не содержащей K , есть простое число либо квадрат простого числа.

Следующая теорема даёт новую информацию о строении разрешимой нормальной подгруппы K группы G с такими индексами максимальных подгрупп. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть K – A_4 -свободная нормальная подгруппа группы G с индексами максимальных подгрупп, не содержащими K , равными простым числам или квадратам простых чисел. Тогда производная длина факторгруппы $K/\Phi(K)$ и нильпотентная длина группы K не превышает 3, 3-длина не превышает 2, p -длина не превышает 1 для всех простых $p \neq 3$.

Пример. Пусть E_{3^3} – элементарная абелева группа порядка 3^3 . Группа $G = [E_{3^3}]SL(2,3)$ порядка 648 имеет нормальную A_4 -свободную подгруппу $K = [E_{3^3}]Q_8$ с единичной подгруппой Фраттини. Индексы максимальных подгрупп группы G , не содержащих K , принадлежат множеству $\{3, 4, 9\}$. Производная длина группы K равна 3. Здесь Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Следовательно, оценка производной длины, полученная в теореме, является точной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
2. Шеметков, Л.А. О конечных разрешимых группах / Л.А. Шеметков // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 533–559.
3. Поляков, Л.Я. О влиянии свойств максимальных подгрупп на разрешимость конечной группы / Л.Я. Поляков // Конечные группы: сб. – Минск, 1966. – С. 89–97.
4. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.

Р. А. СОКОЛОВА, А. В. БЕЛОНОЖКО

ТУСУР (г. Томск, Россия)

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ЛЮМИНОФОРНЫХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ИСТОЧНИКОВ СВЕТА

В Томском государственном университете систем управления и радиоэлектроники функционирует студенческий центр коллективного пользования, где студенты могут как самостоятельно, так и под контролем обучающего персонала проводить исследования.

На оборудовании центра проводятся исследования электрических и оптических свойств люминофорных покрытий для полупроводниковых источников света. Для измерения таких параметров полупроводниковых излучающих диодов и люминофоров, как излучения и возбуждения, а также снятия диаграмм чипов СИД и определения степени деградации данных параметров со временем были использованы спектрометр USB2000 Ocean Optics 2.0 и растровый электронный микроскоп Hitachi TM-1000 с рентгеноспектральной системой для микроанализа, измеритель иммитанса E7-20.

Данная работа предназначена для использования в учебных планах по подготовке бакалавров и магистров по направлениям «Инноватика», «Полупроводниковые технологии» и «Нанотехнологии».

В последнее время светоизлучающие диоды все больше претендуют на использование их в освещении, художественной подсветке, сигнальной технике. Малое потребление электрической энергии, легкость формирования диаграммы направленности с помощью различной оптики, простота управления и, самое важное, специфическое восприятие излучения глазом делают светодиоды незаменимыми для создания полноцветных экранов, вывесок и других средств представления информации в виде динамического изображения. Однако это порождает особые требования к характеристикам светодиодов. Были проведены исследования, оценки и сравнения этих характеристик.

Для исследования деградации использовался люминофор марки ФЛЖ-7 с толщиной 296 мкм. Исследуемый образец помещался между двумя резисторами, нагреваемые до определенной температуры. При этом снимался спектр интенсивности с интервалом температур 25–30° С.

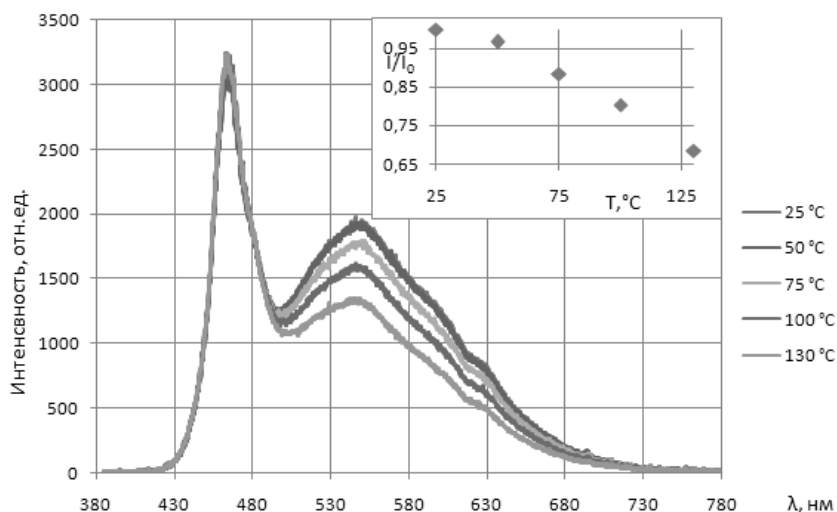


Рисунок 1 – Зависимость спектров излучения полупроводникового источника света

Исследование спектров излучения показало, что эффективность люминесценции при повышенных температурах существенно уменьшается, в результате чего происходит не только уменьшение суммарного светового потока, но и увеличение цветовой температуры за счет изменения соотношения синего и желто-красного цветов. Были рассчитаны значения цветовой температуры, для каждого значения температуры люминофора.

Таблица – Значение цветовой температуры люминофора от температуры окружающей среды

T, град	25	50	75	100	130
T _c , К	4963,63	5005,43	5257,48	5567,65	6112,68
X	0,353	0,351	0,341	0,330	0,314
Y	0,428	0,427	0,418	0,409	0,395

Координаты цветности из таблицы были нанесены на цветовую диаграмму, изображенную на рисунке 2.

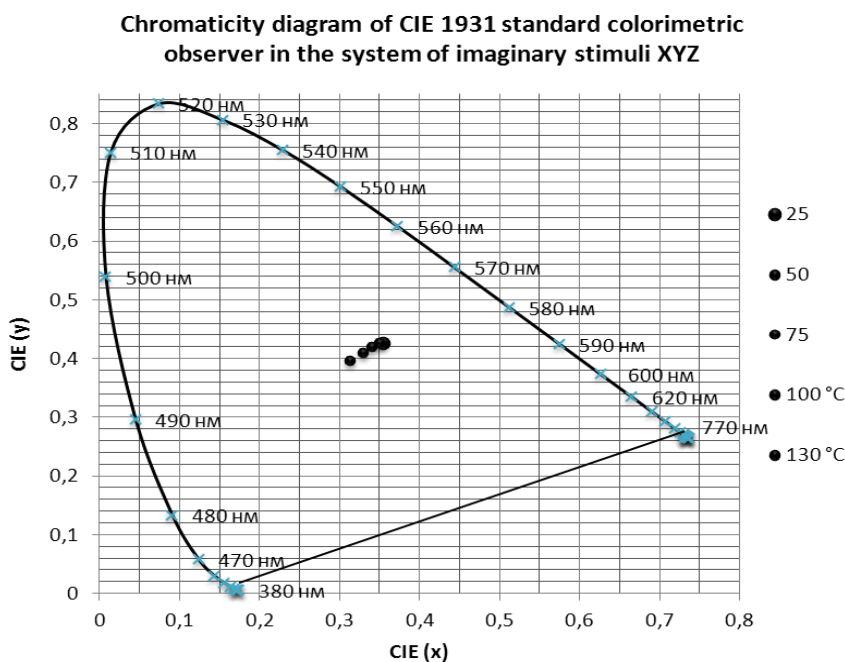


Рисунок 2 – Нанесенные на цветовую диаграмму координаты x, y, соответствующие разным температурам люминофора

Из рисунка 2 следует, что при увеличении температуры на люминофорном слое, значение координат цветности x и y падает, что сказывается на увеличении цветовой температуры, то есть свет данного источника будет иметь более «холодный» оттенок. Данное явление связано с понижением эффективности люминофора, что ведёт к увеличению вклада голубой составляющей в излучаемый свет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуберт, Ф. Светодиоды / Ф. Шуберт. – М.: Физматлит, 2008. – 496 с.
2. Некоторые закономерности деградации синих светодиодов на основе InGaN/GaN / Е.Д. Васильева [и др.] // Светотехника. – 2007. – № 5.
3. Никифоров, С.Г. Почему светодиоды не всегда работают так, как хотят их производители? / С.Г. Никифоров // Компоненты и технологии. – 2005. – № 7.
4. Полищук А. П., Туркин А.В. Деградация полупроводниковых светодиодов на основе нитрида галлия и его твердых растворов / А.П. Полищук, А.В. Туркин // Компоненты и технологии. – 2008. – № 2.

А. А. ТРОФИМУК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ НЕБИЦИКЛИЧЕСКИХ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП НЕКОТОРЫХ ФАКТОРОВ

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1, 2].

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B .

Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в работе [3]. В.С. Монахов [4] установил, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$ -е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G .

Идеи работ [3] и [4] нашли применение в исследовании разрешимых групп, небициклические силовские подгруппы которых имеют ограниченные порядки. Так, в работе [5] для разрешимой группы G , у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p -подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3 , доказано, что ее производная длина не превышает 6. Если же небициклические силовские подгруппы разрешимой группы имеют произвольный порядок, то доказано, что производная длина такой группы ограничена сверху значениями функций, зависящими от этих порядков.

Из результата Бэра [6, с. 720] следует сверхразрешимость разрешимой группы G , обладающей цепочкой подгрупп

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G), G_i \triangleleft G \quad (1)$$

такой, что $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i . Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Очевидно, что группа останется сверхразрешимой, если силовские подгруппы в факторах цепочки вида (1) будут циклическими.

В работе [7] исследовались разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (1) бициклические. В частности, доказано, что производная длина фактор-группы такой группы по подгруппе Фраттини не превышает 5, а нильпотентная длина самой группы не превышает 4.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, у которых факторы цепочки вида (1) имеют заданные ограничения. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Зафиксируем натуральное число n . Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (1) такая, что порядок каждой небициклической силовской p -подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i не делится на p^{n+1} , для каждого i и каждого $p \in \pi(G)$. Тогда нильпотентная длина группы G и производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышают $\rho(n)+1$.*

Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n, \mathbb{P})$ над полем \mathbb{P} . Значения $\rho(n)$ вычислены для всех n в работе [8, лемма 2.4].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф13М-113).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
2. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск: Выш. школа. – 2006.

3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
4. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – 43, № 4. – С. 411–424.
5. Монахов, В.С. Конечные группы с ограничениями на порядки некоторых силовских подгрупп / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 127–132.
6. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.
7. Трофимук, А.А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3 (19). – С. 304–307.
8. Berkovich, Y. Solvable permutation groups of maximal derived length / Y. Berkovich // Algebra Colloquium. – 1997. – Vol. 4 (2). – P. 175–186.

С. В. ТРУБНИКОВ

БГУ им. акад. И.Г. Петровского (г. Брянск, Россия)

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В ОБЛАСТИ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Задача Дирихле для уравнения Пуассона является основой для математических и компьютерных моделей многих явлений и часто возникает в приложениях [1]. Если область, в которой решается краевая задача, имеет сложную форму, то непосредственное применение аналитических и численных методов для решения краевой задачи значительно затрудняется. В рассматриваемом случае рабочая область представляет собой обобщённую криволинейную трапецию, а трудности в решении задачи преодолеваются с помощью замены переменной, отображающей эту трапецию на прямоугольник. Для решения преобразованной краевой задачи использован метод Галёркина [2].

Правая часть уравнения Пуассона обычно задаётся формулой, но такой способ задания функций не всегда удобен. Нередко для проведения вычислительных экспериментов требуется задавать функции с определённой формой графика. Этого можно добиться, если задавать таблицу значений функции, а затем на её основе построить гладкую аппроксимацию задаваемой функции. Если для получения гладкой аппроксимации правой части уравнения Пуассона использовать ряд Фурье по системе пробных функций метода Галёркина, то она оказывается особенно удобной для дальнейшего применения метода Галёркина.

Пусть $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, γ – граница области G . Здесь a – заданная положительная постоянная, $y_1(x)$, $y_2(x)$ – заданные, шестикратно непрерывно дифференцируемые функции.

Введём замену переменной

$$y = y_1(x) + \eta(y_2(x) - y_1(x)) \Leftrightarrow \eta = \frac{(y - y_1(x))}{(y_2(x) - y_1(x))}. \quad (1)$$

Прямое отображение (1) преобразует область G в прямоугольник $P = \{(x, \eta): 0 \leq x \leq a, 0 \leq \eta \leq 1\}$. Γ – граница прямоугольника P . В прямоугольнике P вводится прямоугольник $R = \{(x, \eta): c_1 \leq x \leq c_2, d_1 \leq \eta \leq d_2\}$. Здесь c_1 , c_2 , d_1 , d_2 – заданные положительные постоянные. А в области G вводится область $Q = \{(x, y): c_1 \leq x \leq c_2, y_1(x) + d_1(y_2(x) - y_1(x)) \leq y \leq y_1(x) + d_2(y_2(x) - y_1(x))\}$, которая является образом прямоугольника R при обратном отображении (1).

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона. Ищется дважды непрерывно дифференцируемая в $G \setminus \gamma$ и непрерывная на G функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в $G \setminus \gamma$ уравнению Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (2)$$

а на границе γ – однородному граничному условию первого рода

$$u|_{\gamma} = 0. \quad (3)$$

Функция $f(x, y)$ задаётся следующим образом. Сделаем замену переменных (1) под знаком функции $f(x, y)$. В результате получается функция $F(x, \eta) = f(x, y_1(x) + \eta(y_2(x) - y_1(x)))$. В прямоугольнике R вводится прямоугольная сетка точек $\{(x_i, \eta_j): i = 0, 1, \dots, n_x, j = 0, 1, \dots, n_\eta\}$. Координатные линии этой сетки делят прямоугольник R на прямоугольники P_{ij} , которые, в свою очередь, разбиваются диагоналями на треугольники T_{ij}^u и T_{ij}^d . Узлам введённой сетки (x_i, η_j) в прямоугольнике R соответствуют узлы криволинейной сетки $(x_i, y_{ij}) = (x_i, y_1(x_i) + \eta_j(y_2(x_i) - y_1(x_i)))$ в области Q . В качестве основных исходных данных,

определяющих функцию $f(x, y)$, задаются её значения в этих узлах $f(x_i, y_{ij}) = f_{ij}$. Эти же значения будет иметь функция $F(x, \eta)$ в узлах прямоугольной сетки: $F(x_i, \eta_j) = f(x_i, y_{ij}) = f_{ij}$.

Далее строится функция $\tilde{F}(x, \eta)$, которая является линейной в каждом из треугольников T_{ij}^u и T_{ij}^d , удовлетворяет условиям интерполяции $\tilde{F}(x_i, \eta_j) = f_{ij}$ и обращается в ноль вне прямоугольника R . Она разлагается в ряд Фурье по ортогональной, замкнутой в $L_2(P)$ и удовлетворяющей граничному условию (3) системе функций:

$$\varphi_k(x, \eta) = \sin\left(\frac{\pi p(k)x}{a}\right) \cdot \sin(\pi q(k)\eta). \quad (4)$$

В качестве окончательной гладкой аппроксимации функции $F(x, \eta)$ выберем N -ю частичную сумму этого ряда Фурье:

$$F^N(x, \eta) = \sum_{k=1}^N F_k \cdot \varphi_k(x, \eta). \quad (5)$$

Здесь N – заданное натуральное число. Коэффициенты Фурье F_k вычисляются аналитически. В качестве окончательной гладкой аппроксимации функции $f(x, y)$ выберем

$$f^N(x, y) = F^N\left(x, \frac{(y - y_1(x))}{(y_2(x) - y_1(x))}\right) = \sum_{k=1}^N F_k \cdot \varphi_k\left(x, \frac{(y - y_1(x))}{(y_2(x) - y_1(x))}\right). \quad (6)$$

Суммами такого вида можно аппроксимировать любую функцию из $L_2(G)$ с любой точностью.

Далее, вместо задачи (2)–(3), решается задача:

$$\Delta u^N = f^N(x, y), \quad u^N|_{\gamma} = 0. \quad (7)$$

После замены переменной (1) эта задача приводится к следующему виду:

$$L(U^N) = F^N(x, \eta), \quad U^N|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

Здесь $U^N(x, \eta)$ – функция такая, что $U^N\left(x, \frac{(y - y_1(x))}{(y_2(x) - y_1(x))}\right) = u^N(x, y)$, а $L(U^N)$ – линейный

дифференциальный оператор 2 порядка с переменными коэффициентами. Задача (8) решается методом Галёркина.

Приближённое решение $U_M^N(x, \eta)$ задачи (8) будем искать в виде конечной суммы:

$$U_M^N(x, \eta) = \sum_{k=1}^M U_k \cdot \varphi_k(x, \eta). \quad (9)$$

Здесь $M \geq N$. Для определения неизвестных постоянных U_k используем проекционное соотношение:

$$(L(U_M^N) - F^N, \varphi_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

Подставляя в него выражения (5) и (9) и, учитывая условия ортогональности пробных и поверочных функций (8), а также линейность дифференциального оператора $L(U)$, получим линейную систему относительно неизвестных постоянных U_k , решая которую находим приближенное решение задачи. Интересно заметить, что

$U_M^N(x, \eta) = U_N^N(x, \eta)$ при $M > N$. Поэтому значение M выбирается равным N и окончательно

приближенное решение задачи (2)–(3) получается в виде $u_N^N(x, y) = U_N^N\left(x, \frac{(y - y_1(x))}{(y_2(x) - y_1(x))}\right)$.

Сходимость $u^N(x, y)$ к $u(x, y)$ при $n_x, n_\eta, N \rightarrow \infty$ будет иметь место, если задача (1)–(2) устойчива по правой части уравнения Пуассона и сама правая часть достаточно гладкая.

В заключение следует отметить, что описанный в работе подход может быть распространён на широкий круг подобных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977 – 736 с.
2. Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М.: Мир, 1988. – 352 с.

А. П. ХУДЯКОВ, Ю. Н. КОМАДЫНЯ
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

**ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЛАГРАНЖЕВА ТИПА
ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОГО АРГУМЕНТА**

В работах [1, 2] рассмотрен лагранжева типа интерполяционный многочлен первой степени вида:

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)); H_i(\cdot)] d\tau, \quad (1)$$

где $\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i)$, $H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i)$, удовлетворяющий в узлах $A_0(t)$ и $A_1(t)$ интерполяционным условиям $L_1(A_i) = F(A_i)$ ($i = 0, 1$), для операторов, заданных в пространстве квадратных функциональных матриц $A(t) = [a_{ij}(t)]$, для которых производная $A^{(m)}(t) = [a_{ij}^{(m)}(t)]$ порядка m непрерывна на отрезке $T = [a, b]$.

Приведем обобщение формулы (1) на случай трех матричных узлов $A_0(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ с функциональными элементами.

Рассмотрим матричный многочлен второй степени вида:

$$\tilde{P}_2(A) = B + \sum_{j_1, j_2=0}^n \tilde{N}_{j_1 j_2} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] D_{j_1 j_2} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{T^2} P_k(t, s_1, s_2) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] Q_k(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \\ + \sum_{j=0}^n C_{3,j} [A(t_{j_1}) - A(t_{j_2})] C_{4,j} [A(t_{j_3}) - A(t_{j_4})] C_{5,j} + \\ + \sum_{k=0}^m \int_{T^4} P_{k,3}(t, s) [A^{(k)}(s_1) - A^{(k)}(s_2)] P_{k,4}(t, s) [A^{(k)}(s_3) - A^{(k)}(s_4)] P_{k,5}(t, s) ds, \quad (2)$$

где t_0, t_1, \dots, t_n – фиксированные точки отрезка $T = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $B = B(t)$, $\tilde{N}_{j_1 j_2} = \tilde{N}_{j_1 j_2}(t)$, $D_{j_1 j_2} = D_{j_1 j_2}(t)$, $\tilde{N}_{i,j} = \tilde{N}_{i,j}(t)$ ($i = 3, 4, 5$), $(j, j_1, j_2, j_3, j_4 = \overline{0, n})$ – заданные фиксированные матрицы, $P_k(t, s_1, s_2)$, $Q_k(t, s_1, s_2)$, $P_{k,i}(t, s)$ ($i = 3, 4, 5$), $(k = \overline{0, m})$ – также заданные матрицы той же размерности, что и $A(t)$, а $S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$, $ds = ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$.

Введем обозначения:

$$l_{21}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [A(t_i) - A_1(t_i)] [A(t_i) - A_0(t_i)] [A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} \times \\ \times \left([A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{21}) - F(A_2)] + [A_0(t_i) - A_1(t_i)]^{-1} [F(\sigma_{1i}^{01}) - F(A_0)] \right),$$

$$l_{22}(A) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \int_0^1 \int_0^1 \tau \delta^2 F \left[\sigma_{li}^{01}(\cdot) + \tau (A_1(\cdot) - \sigma_{li}^{01}(\cdot)) + \tau \sigma (A_2(\cdot) - \sigma_{li}^{12}(\cdot)); H_{i1}(\cdot) H_{i0}(\cdot) \right] d\tau ds,$$

где $\sigma_{li}^{01}(t) = \sigma_{li}(t)$, $\sigma_{li}^{12}(t) = A_1(t) + A_2(t_i) - A_1(t_i)$, $\sigma_{li}^{21}(t) = A_2(t) + A_1(t_i) - A_2(t_i)$, $H_{i0}(t) = H_i(t)$, $H_{i1}(t) = A(t) - A_1(t) - A(t_i) + A_1(t_i)$.

Имеет место

Теорема. Если существуют матрицы $[A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_2(t_i) - A_0(t_i)]^{-1}$, $[A_1(t_i) - A_2(t_i)]^{-1}$ ($i = \overline{0, n}$), то для формулы

$$L_2(A) = L_1(A) + l_{21}(A) + l_{22}(A), \quad (3)$$

где $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{0, 2}$) – узлы интерполирования, $L_1(A)$ – многочлен, определенный формулой (1), выполняются условия:

$$L_2(A_i) = F(A_i) \quad (i = \overline{0, 2}),$$

и она инвариантна относительно матричных многочленов вида (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Янович, Л.А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
2. Комадыня, Ю.Н. Алгебраическое интерполирование для функций матричного аргумента / Ю.Н. Комадыня // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. мат. регион. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 окт. 2013 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2013. – С. 6–7.
3. Makarov, Volodymyr L. Methods of Operator Interpolation / Volodymyr L. Makarov, Volodymyr V. Khlobystov, Leonid A. Yanovich. – К.: Праці Ін-ту математики НАН України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

А. П. ХУДЯКОВ, С. С. МАЗУРИК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЭРМИТОВА ТИПА ПО СИСТЕМЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СТЕПЕНИ

Рассматривается задача построения интерполяционного многочлена Эрмита–Биркгофа по системе экспоненциальных функций вида:

$$\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x} \quad (k = \overline{0, n+1}), \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}, \quad (1)$$

удовлетворяющего в узлах $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ обобщённым интерполяционным условиям:

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = \overline{0, n}); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_j) = D_{n+1}(f; x_j). \quad (2)$$

Дифференциальный оператор D_{n+1} определяется по формуле:

$$D_{n+1}f(x) = D(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)f(x), \quad D = \frac{d}{dx}. \quad (3)$$

Заметим, что оператор (3) является аннулирующим для первых $n + 1$ функций системы (1).

Вводятся функции $g_m(y_0, y_1, \dots, y_m)$, заданные рекуррентными соотношениями

$$g_0(y_0) = -1, \quad g_1(y_0, y_1) = g_0(y_1)e^{\lambda_1 y_0} - g_0(y_0)e^{\lambda_1 y_1} = e^{\lambda_1 y_1} - e^{\lambda_1 y_0}, \dots,$$

$$g_n(y_0, y_1, \dots, y_n) = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k g_{n-1}(y_0, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n) e^{\lambda_n y_k}, \quad (4)$$

обладающие свойствами:

1. При перестановке любых двух соседних аргументов y_k, y_{k+1} местами функция $g_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ меняет знак на противоположный:

$$g_n(y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, y_{k+2}, \dots, y_n) = -g_n(y_0, y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n).$$

2. Для любых вещественных чисел y_0, y_1, \dots, y_{n-1} и любых i и n ($0 \leq i \leq n-1, n \geq 1$) справедливо равенство:

$$g_n(y_i, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0.$$

Т е о р е м а 1. Если $\tilde{g}_n = g_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \neq 0$, то интерполяционный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_n(x) e^{-\lambda_{n+1} x} D_{n+1}(f; x_j)}{\lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (5)$$

где

$$L_n(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i g_n(x, x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) f(x_i),$$

$$\Omega_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(x, x_0, x_1, \dots, x_n),$$

удовлетворяет условиям (2).

Для формулы (5) получена оценка погрешности.

Пусть

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |D_{n+1} f(x)|, \quad B_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{d}{dx} D_{n+1} f(x) \right|,$$

$$C_n = \max_{x \in [a, b]} |\Omega_n(x)|, \quad \gamma_{n+1} = \lambda_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

Т е о р е м а 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема $n+2$ раз в интервале (a, b) , то оценка погрешности формулы (5) для любого $x \in [a, b]$ имеет вид:

$$\left| f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) \right| \leq \frac{(b-a) C_n e^{-\lambda_{n+1} a}}{\gamma_{n+1}} [B_{n+1} + \lambda_{n+1} M_{n+1}].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
2. Худяков, А.П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.
3. Мазурик, С.С. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита–Биркгофа относительно одной системы дробно-рациональных функций / С.С. Мазурик // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. мат. регион. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 окт. 2013 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2013. – С. 9.

С. Д. ШАВРЕЙ¹, А. И. ПИНЧУК²

¹МГПУ им. И.П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)

²БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПЛАСТИФИКАЦИИ КРИСТАЛЛОВ СУРЬМЫ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В последние десятилетия активно исследуется магнитоэластический эффект (МПЭ) в твердых телах [1]. Несмотря на значительные достижения в этой области, практически не изучен вопрос о механизмах влияния магнитного поля (МП) на пластическую деформацию кристаллов, в которых пластическая деформация одновременно реализуется как скольжением, так и двойникованием.

Ранее нами было обнаружено [2], [3], что одновременное воздействие постоянного МП и сосредоточенной нагрузки на монокристаллы висмута и сурьмы приводит к существенному снижению размеров клиновидных двойников. В настоящей работе представлены некоторые закономерности развития двойникования в кристаллах сурьмы при одновременном приложении постоянного МП и переменной сосредоточенной нагрузки в условиях сопутствующего скольжения.

Для исследования были выбраны монокристаллы сурьмы, выращенные по методу Бриджмена из сырья химической чистоты. Образцы имели вид прямоугольных призм и размеры $10 \times 5 \times 5$ мм. Исследования проводились с помощью микротвердомера ПМТ-3, алмазная пирамидка которого представляет собой сосредоточенную нагрузку. Индентор вдавливался в плоскость совершенной спайности (111) кристаллов сурьмы. Рабочая поверхность получалась раскалыванием образца вдоль плоскости спайности и была пригодна к исследованиям без дальнейшей обработки. Индукция МП в зазоре сердечника электромагнита, куда помещался образец, была постоянна и равна $B=0,2$ Тл. Масса груза на штоке индентора варьировалась в интервале $m=15-35$ г. В результате были получены зависимости диагонали d отпечатка индентора, длины L и ширины h клиновидных двойников, а также их числа N от m . Точки графиков зависимости получены путем усреднения результатов измерений размеров двойников, заклинившихся вокруг 20 и более отпечатков.

Анализ экспериментальных результатов показал, что между размерами отпечатков алмазного индентора, размером, числом клиновидных двойников и нагрузкой на индентор существует корреляция. С ростом нагрузки на индентор в кристаллах сурьмы параметры d , L , h и N обнаруживают рост с увеличением m . Однако в присутствии МП диагональ отпечатка, число клиновидных двойников и их толщина у устья увеличиваются, в то время как длина падает.

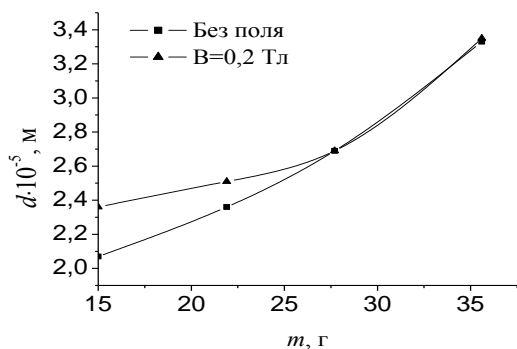


Рисунок 1 – Диагональ отпечатка d в зависимости от массы груза m на штоке индентора

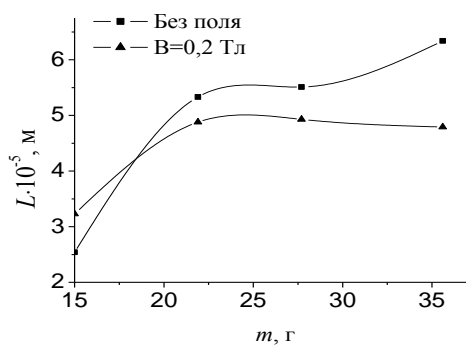


Рисунок 2 – Длина двойников L в зависимости от массы груза m на штоке индентора

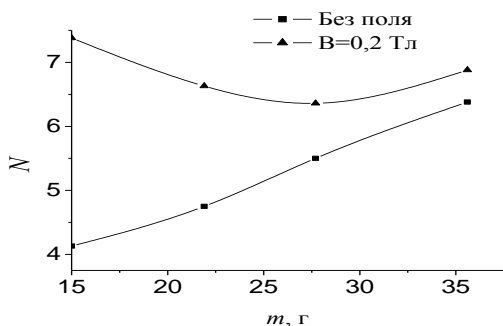


Рисунок 3 – Число двойников N в зависимости от массы груза m на штоке индентора

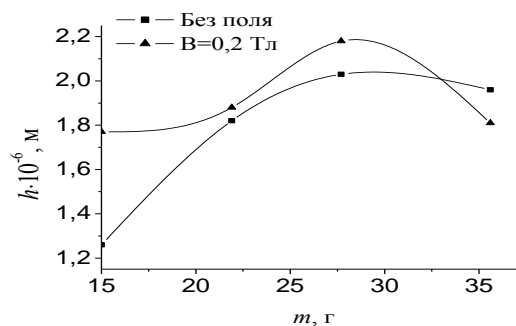


Рисунок 4 – Ширина двойников h в зависимости от массы груза m на штоке индентора

На основании полученных экспериментальных данных сделаны следующие выводы: увеличение диагонали отпечатка указывает на пластифицирующее влияние МП при микроиндентировании кристаллов сурьмы; увеличение толщины двойников и их числа указывает на интенсификацию размножения двойникоующих дислокаций за счет стимулирования источников приложением МП; падение длины двойников указывает на снижение подвижности двойникоующих дислокаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головин, Ю.И. Магнитопластичность твердых тел / Ю.И. Головин // ФТТ. – 2004. – Т. 46, вып. 5. – С. 769–803.
2. Пинчук, А.И. Магнитопластический эффект в случае двойникоования кристаллов висмута под воздействием сосредоточенной нагрузки / А.И. Пинчук, С.Д. Шаврей // ФТТ. – 2001. – Т. 43, вып. 1. – С. 39–41.
3. Пинчук, А.И. Двойникоование в кристаллах сурьмы в условиях воздействия сосредоточенной нагрузки и постоянного магнитного поля / А.И. Пинчук, С.Г. Слесарев // 16 Петербургские чтения по проблемам прочности: материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 75-летию со дня рождения В.А. Лихачева, Санкт-Петербург, 14–16 марта 2006 г. – С. 120.

У. А. ШЫЛІНЕЦ, Ж. С. ТОПАЛЬ, Г. А. СКРАБЕЦ
БДПУ імя М. Танка (г. Мінск, Беларусь)

РАШЭННЕ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ ТРЭЦЯГА ПАРАДКУ ПРЫ ДАПАМАЗЕ F-МАНАГЕННЫХ ФУНКЦЫЙ

Няхай $p = p(x, y), q = q(x, y)$ – адназначныя функцыі класа $C^1(D)$. Праз $C^k(D)$ абазначаем клас функцый ад назалежных зменных x, y , якія маюць у аднавязным абсягу D непарыўныя частковыя вытворныя да парадку k уключна. Лічым гэтыя функцыі рэчаіснымі або камплекснымі, або гіперкамплеснымі і ў апошнім выпадку мяркуем, што значэнні гэтых функцый у абсягу D з’яўляюцца элементамі якой-небудзь асацыятыўнай і камутатыўнай алгебры з адзінкай над полем камплексных лікаў. Мяркуем, што ў абсягу D існуе δ^{-1} , дзе $\delta = p'_x q'_y - p'_y q'_x$.

Пры гэтых умовах формальнымі вытворнымі $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}$ якой-небудзь функцыі

$f = f(x, y) \in C^1(D)$ называюцца такія функцыі ад x, y , якія вызначаюцца ў абсягу D наступным чынам:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \delta^{-1} \left(\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) f, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \delta^{-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) f.$$

Няхай $p, q, f \in C^2(D)$. Тады вызначым фармальныя вытворныя

$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}, \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}$ з сістэмы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial q}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial y}, \end{aligned}$$

адкуль

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \delta^{-1} \left(\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = \delta^{-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = \delta^{-1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} = \delta^{-1} \left(\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Такім чином, згодна з означенням формальних витворних 1-го парадку, маємо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right).$$

Аналогічно визначаюцца формальныя витворныя $\frac{\partial^n f}{\partial p^k \partial q^{n-k}}$ парадку $n > 2$ у випадку функцій p, q і

f класа $C^n(D)$.

Предметам нашага даследавання з'яўляецца наступная сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых витворных трэцяга парадку:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} &= 0, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

дзе f, φ – шуканыя камплексныя функцыі класа $C^3(D)$.

Няхай $\Phi = f + j\varphi, p = x + jy, q = x - jy$ ($j^2 = i^2 = -1, j \neq i$).

Тэарэма 1. Сістэма дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых витворных (1) эквівалентная дыферэнцыяльнаму раўнанню ў формальных витворных

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial q^3} = 0. \quad (2)$$

Знойдзем агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (2).

Тэарэма 2. Агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў формальных витворных n -га парадку

$$\frac{\partial^n f}{\partial q^n} = 0$$

мае выгляд:

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} h_k q^k, \quad (x, y) \in D,$$

дзе $h_k = h_k[p]$ – любыя функцыі, манагенныя ў сэнсе У.С. Фёдарова (F-манагенныя) ў абсягу D адносна функцыі p ($k = 0, 1, \dots, n-1$) [1].

Такім чынам, згодна з тэарэмай 2, агульнае рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (2) мае наступны выгляд:

$$\Phi = h_2 q^2 + h_1 q + h_0,$$

дзе $h_k = h_k[p]$ – адвольныя функцыі, F-манагенныя ў абсягу D адносна функцыі p ($k = 0, 1, 2$).

Лёгка паказаць [2], што бікамлексная функцыя $H = H_1(x, y) + jH_2(x, y)$, манатонная ў сэнсе У. С. Фёдарова па функцыі $p = x + jy$ у абсягу D , мае выгляд:

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \{u[\bar{z}] + v[z]\} + j \frac{i}{2} \{u[\bar{z}] - v[z]\},$$

дзе $u[\bar{z}]$ – камплексная функцыя, аналітычная ад $\bar{z} = x - iy$ у абсягу D ; $v[z]$ – камплексная функцыя, аналітычная ад $z = x + iy$ у абсягу D .

Такім чынам, агульнае рашэнне раўнання (2) мае выгляд:

$$\begin{aligned} \Phi = & \left\{ \frac{u_2[\bar{z}] + v_2[z]}{2} + j \frac{i u_2[\bar{z}] - i v_2[z]}{2} \right\} (x - jy)^2 + \\ & + \left\{ \frac{u_1[\bar{z}] + v_1[z]}{2} + j \frac{i u_1[\bar{z}] - i v_1[z]}{2} \right\} (x - jy) + \\ & + \left\{ \frac{u_0[\bar{z}] + v_0[z]}{2} + j \frac{i u_0[\bar{z}] - i v_0[z]}{2} \right\}, \end{aligned}$$

дзе $u_0[\bar{z}], u_1[\bar{z}], u_2[\bar{z}]$ – адвольныя камплексныя функцыі, аналітычныя ад $\bar{z} = x - iy$ у абсягу D ; $v_0[z], v_1[z], v_2[z]$ – адвольныя камплексныя функцыі, аналітычныя ад $z = x + iy$ у абсягу D .

Адсюль атрымліваем рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1):

$$\begin{aligned} f = & \frac{u_2[\bar{z}] + v_2[z]}{2} (x^2 - y^2) + 2xy \frac{i u_2[\bar{z}] - i v_2[z]}{2} + \frac{u_1[\bar{z}] + v_1[z]}{2} x + \\ & + \frac{i u_1[\bar{z}] - i v_1[z]}{2} y + \frac{u_0[\bar{z}] + v_0[z]}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi = & -2xy \frac{u_2[\bar{z}] + v_2[z]}{2} + \frac{i u_2[\bar{z}] - i v_2[z]}{2} (x^2 - y^2) - \frac{u_1[\bar{z}] + v_1[z]}{2} y + \\ & + \frac{i u_1[\bar{z}] - i v_1[z]}{2} x + \frac{i u_0[\bar{z}] - i v_0[z]}{2}. \end{aligned}$$

ЛІТАРАТУРА

1. Фёдоров, В.С. Основные свойства обобщённых моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
2. Стельмашук, Н.Т. О некоторых линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах / Н.Т. Стельмашук // Известия вузов. Математика. – 1964. – № 3. – С. 136–142.

А. А. ЮДОВ, Н. С. КОВАЛИК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО С КАСАТЕЛЬНЫМИ МНИМОЕВКЛИДОВА ТИПА

Группу Ли G движений пространства Минковского (пространства 1R_4) будем задавать как совокупность матриц вида:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$, а 4×4 матрица A удовлетворяет условию:

$$A \varepsilon_{4,1} A^T = \varepsilon_{4,1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{4,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Алгебра Ли \overline{G} будет задаваться как совокупность матриц вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & B \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где 4×4 матрица B удовлетворяет условию $B \varepsilon_{4,1} + \varepsilon_{4,1} B = 0$.

Точки пространства 1R_4 будем задавать в виде:

$$x = (1, x_1, x_2, x_3, x_4)^T. \quad (4)$$

Группа G действует в пространстве 1R_4 слева по правилу:

$$x \rightarrow a \cdot x. \quad (5)$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства 1R_4 и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства:

$${}^1R_4: G = H \otimes T_4. \quad (6)$$

Алгебра Ли \overline{G} является полупрямой суммой алгебры Ли \overline{H} группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_4 группы Ли T_4 :

$$\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4 \quad (7)$$

Базис в алгебре Ли \overline{G} группы Ли G движений пространства 1R_4 берется следующим образом:

$$\begin{aligned} i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_2 = E_{23} + E_{32}, i_6 = E_{24} + E_{42}, i_7 = E_{25} + E_{52}, \\ i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $E_{\alpha\beta}$ – (5×5) -матрица, у которой в α -й строке, β -м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули.

Причем векторы i_5, i_6, \dots, i_{10} образуют базис алгебры Ли \overline{H} группы Ли H , векторы i_1, i_2, i_3, i_4 образуют базис алгебры τ_4 , а операция коммутирования в алгебре Ли \overline{G} задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in \overline{G}. \quad (9)$$

Классификация связных подгрупп Ли группы Ли движений пространства Минковского с точностью до сопряженности имеется [1]. Всего среди подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского получается 13 подгрупп Ли: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}$. Алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6, \overline{G}_7, \overline{G}_8, \overline{G}_9, \overline{G}_{10}, \overline{G}_{11}, \overline{G}_{12}, \overline{G}_{13}$, этих групп Ли задаются соответственно базисами: $\{i_9\}, \{i_6\}, \{i_5 - i_8\}, \{i_9 + \lambda i_6\}, \{i_6, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}\}, \{i_5 - i_8, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9 + \lambda i_6\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5, i_6, i_8\}, \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_9, i_6\}$.

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G . В данной работе классифицируются все одномерные подмногообразия пространства Минковского касательное пространство, к которым является пространством действительного типа.

При классификации одномерных подмногообразий пространства Минковского используются результаты работы [1] и [2].

Рассмотрим одномерные подмногообразия пространства 1R_4 . Пусть (D_0, f) – одномерное подмногообразие (кривая) пространства 1R_4 , причем D_0 – интервал на числовой прямой, содержащий точку ноль и $\pi(e) = f(0)$. Рассмотрим касательное пространство $K_1 = T_{\pi(e)}(l_m f)$ к подмногообразию (D_0, f) в точке $\pi(e)$. Пространство K_1 может быть либо евклидовым, либо мнимоевклидовым, либо изотропным.

Предположим, что касательное подпространство к подмногообразию (D_0, f) в каждой точке $x_0 \in D_0$ мнимоевклидова типа. Пусть $K_1 = T_{\pi(e)}(l_m f) = \{i_1\}$. Ему соответствует прообраз $K'_1 = d\pi_e^{-1}(K_1) = \{i_1, i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}\}$. Группа стационарности H_1 пространства K_1 в H -пространстве Q_1 всех одномерных подпространств пространства $T_{\pi(e)}({}^1R_4)$ может быть найдена как группа стационарности пространства K'_1 в H -пространстве Z_1 [1] $Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) | K \in Q_1\}$. H_1 определяется условием:

$$H_1 = \{h \in H | Adh(K'_1) = K'_1\}, \quad (10)$$

а ее алгебра Ли \mathfrak{H}_1 условием:

$$\mathfrak{H}_1 = \{v \in \mathfrak{H} | adv(K'_1) = [v, K'_1] \subset K'_1\}. \quad (11)$$

Пусть

$$v = \lambda i_5 + \mu i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10} \in \mathfrak{H}, \quad (12)$$

$$k = i_1 + \alpha i_5 + \beta i_6 + \gamma i_7 + \delta i_8 + p i_9 + q i_{10} \in K'_1. \quad (13)$$

Тогда:

$$adv(k) = [v, k] = \lambda i_2 + \mu i_3 + \nu i_4 + \psi, \quad (14)$$

где $\psi \in \mathfrak{H}$.

По условию $adv(k) \in K'_1$, отсюда получим: $\lambda=0, \mu=0, \nu=0$. Таким образом, $\mathfrak{H}_1 = \{i_8, i_9, i_{10}\}$ и совпадает с $\overline{G_{11}}$, а группа H_1 совпадает с G_{11} . Условие (4) из [1]: $\dim H - \dim H_1 = \dim Q_1$ выполняется, поэтому размерность G -орбиты пространства K_1 во множестве Γ_1 равна размерности множества Γ_1 . Отсюда следует, что подмногообразие (D_0, f) в некоторой окрестности нуля продолжается в G -орбиту элемента K_1 , изоморфную G/H_1 . Группа G_{11} образует следующую цепочку по включению:

$$G_{11} \supset G_1. \quad (15)$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема:

Кривые пространства Минковского, имеющие везде мнимоевклидову касательную, имеют тип $H \supset G_{11} \supset G_1 \supset e$ и определяются с произволом трех функций одного переменного, образующих полную систему дифференциальных инвариантов.

В специальной теории относительности Эйнштейна кривые с мнимоевклидовыми касательными истолковываются как траектории частиц, двигающихся со скоростями, меньшими скорости света.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдов, А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и её алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий. О классификации одномерных подмногообразий пространства 2R_4 / А.А. Юдов. – Минск, 1989. – Деп. в ВИНТИ, № 1498-В89.
2. Гурская, Е.Е. Свойства присоединенного представления группы Ли движений пространства Минковского / Е.Е. Гурская, А.А. Юдов // Вучоныя запіскі Брэсц. ун-та. Сер. прыродазн. навук. – 2011. – Вып. 7, ч. 2. – С. 15–19.
3. Белько, И.В. Подгруппы группы Лоренца-Пуанкаре / И.В. Белько // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.